Př: Jaro 2008 / 2. / 1.

$$\binom{32}{4} = \frac{32!}{4!\cdot 28!} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{4!}$$

a) $\binom{8}{4}$ ... počet výběrů „hodnot"

4^4 ... počet „naplnění" hodnot

již vybraných

$$\frac{4^4\cdot\binom{8}{4}}{\binom{32}{4}}$$

b) 4 ... počet možností pro barvu

$\binom{8}{4}$ ... počet možností pro hodnoty dané barvy

Př. podzim 2007:

Určete P(že náhodná binární relace na n prvkové množině je reflexivní)

Relace na M: $\rho \subseteq M \times M$ $\qquad |M| = m$

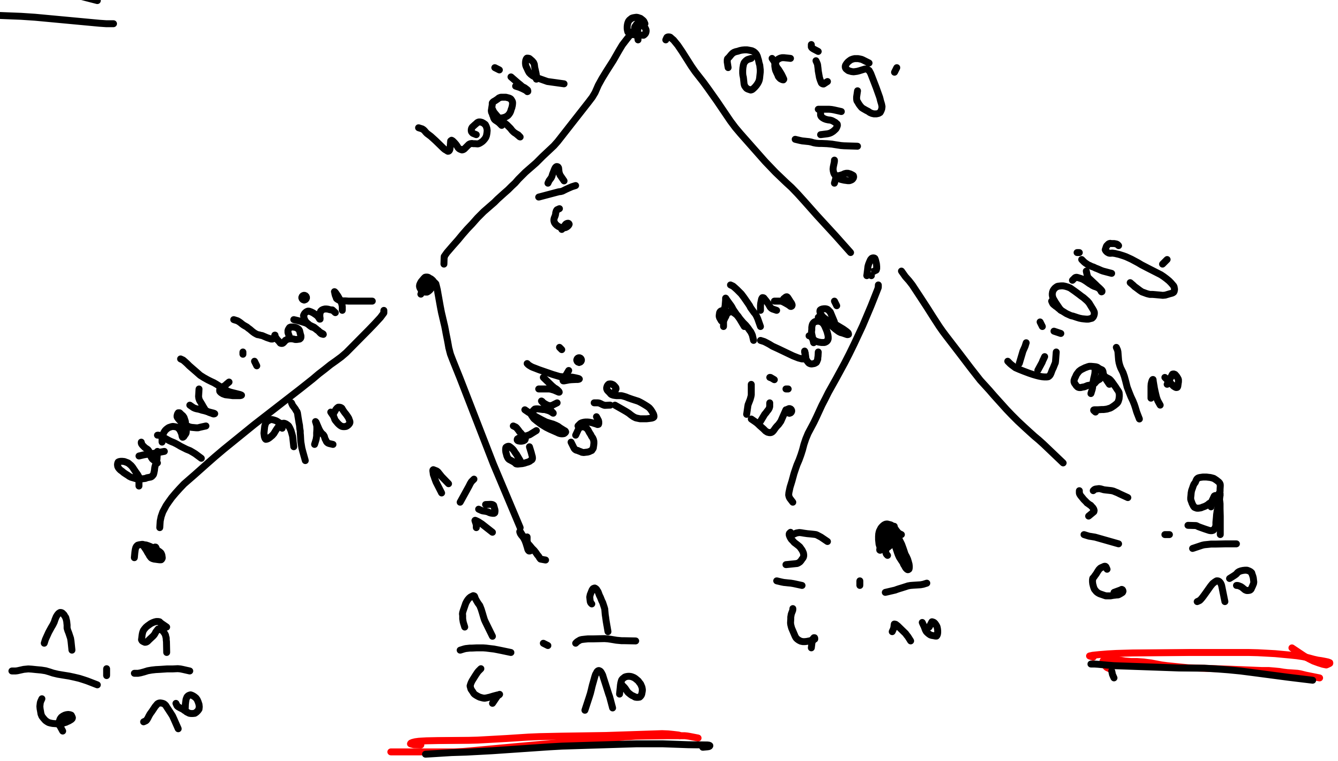
(binární) $\qquad m^2$

Má-li P p prvků, má celkem 2^p podmnožin $\Rightarrow$ binárních relací na M je $2^{(m^2)}$

Reflexivních je 2^{n^2-n}

Tedy pst je $\dfrac{2^{n^2-n}}{2^{n^2}} = \dfrac{\frac{2^{n^2}}{2^n}}{2^{n^2}} = \dfrac{1}{2^n}$

Př: 2



b) jaká je P že je to kopie, řekl-li Exp, že je to originál

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10} \Big/ \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}+\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\right)$$

Př-h:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 11 \\ 1 & 1 & r & 3 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -r-1 & 1 \\ 0 & 0 & -5r-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nulový řád.

a) $5r+3=0$

$r = -\frac{3}{5}$ $\quad x_3 = t$

$x_2 + \left(-\frac{2}{5}\right) x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + \frac{2}{5}t$

$x_1 + 2\left(1 + \frac{2}{5}t\right) - t = 4$

$x_1 = 2 + \frac{1}{5}t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in R$$

b) $r \neq -\frac{3}{5}$ $\quad x_3 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_1 = 2$

Př 5 (podzim 2008)

rozvoj $\longleftarrow$

$$\det\begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ t & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = t\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ t & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$= -t\cdot\left(1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ t & 2 & 4 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -t\cdot 3 + t\cdot(4 - t - 2) =$$

$$= 5t - t^2 = 0 \iff t = 0 \vee t = 5$$

Př:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)^1 = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \quad \text{alg. nás. } 1$$

$$\lambda = 2 \quad \text{alg. nás. } 2$$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_2 = 0$

$x_1 = 0$

$\text{Eigen}(1) = \langle (0,0,1) \rangle$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 = 0$

$x_3 = 3x_2$

$\text{Eigen}(2) = \langle (0,1,3) \rangle$

Př3:

$$\begin{pmatrix} L_{t+1} \\ K_{t+1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -0{,}16 & 1{,}2 \end{pmatrix}}^{S} \begin{pmatrix} L_t \\ K_t \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1 \; ; \; u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad L_0 = 40$

$\lambda_2 = 0{,}8 \; ; \; u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad K_0 = 80$

$S = P \cdot D \cdot P^{-1}$ $\qquad P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{-10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

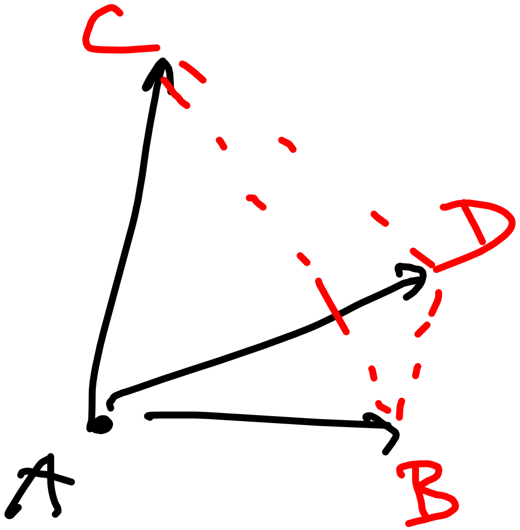
$$S^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1^n = 1 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n \to 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$\lim_{n \to \infty} S^n \longrightarrow P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2{,}5 \\ -0{,}8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_{\varphi} \\ K_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2{,}5 \\ -0{,}8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 160 \\ 128 \end{pmatrix}$$

Př: objem čtyřstěnu: $= \frac{1}{6}$ objemu rovnoběžnostěnu



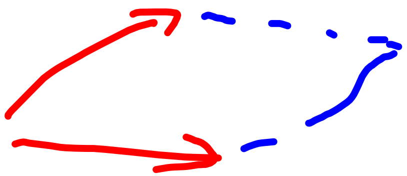
$B-A = (-6,-3,-1)$

$C-A = (-3,-1,5)$

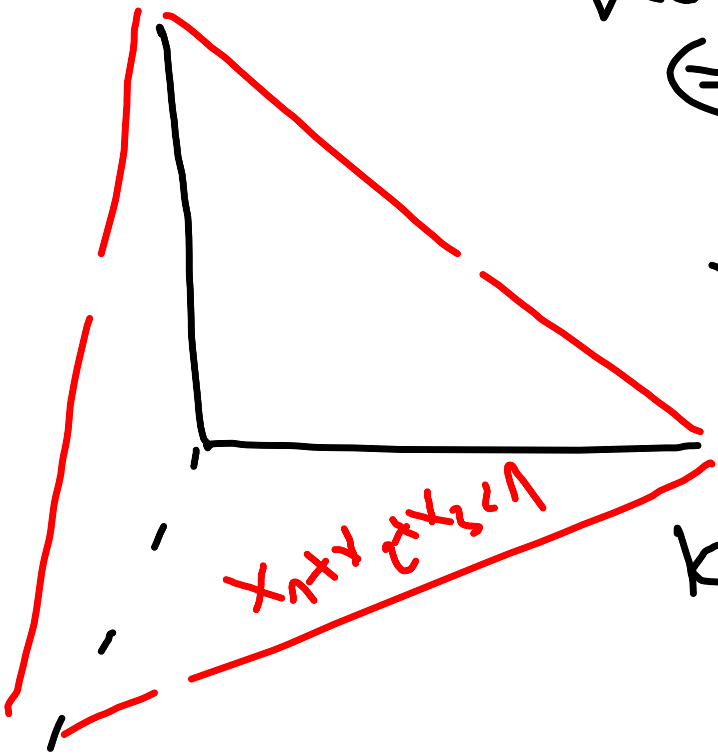
$D-A = (-2,4,-4)$

$$\begin{vmatrix} -6 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -124$$

$$V = \frac{124}{6}$$



leží $[0,3,0]$ uvnitř?



$X \in$ rovnoběžnostěnu

$\Leftrightarrow$ každá souřadnice je z intervalu $\langle 0,1\rangle$

$X \in$ čtyřstěnu

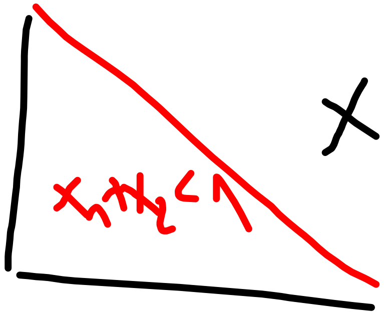
$\Leftrightarrow$ $\forall$ afinní souřadnice ≥ 0

Krok 1: vyjádříme X jako afinní kombinaci A, B, C, D, tj.

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma \cdot C + \delta \cdot D,$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

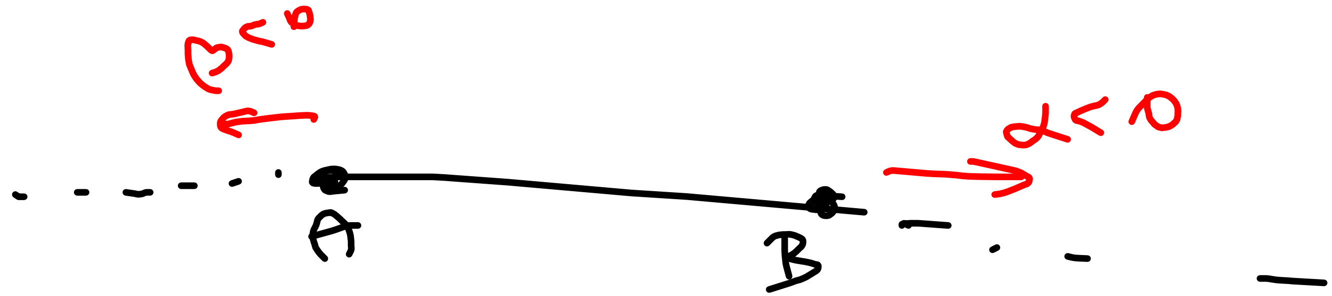
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$



$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

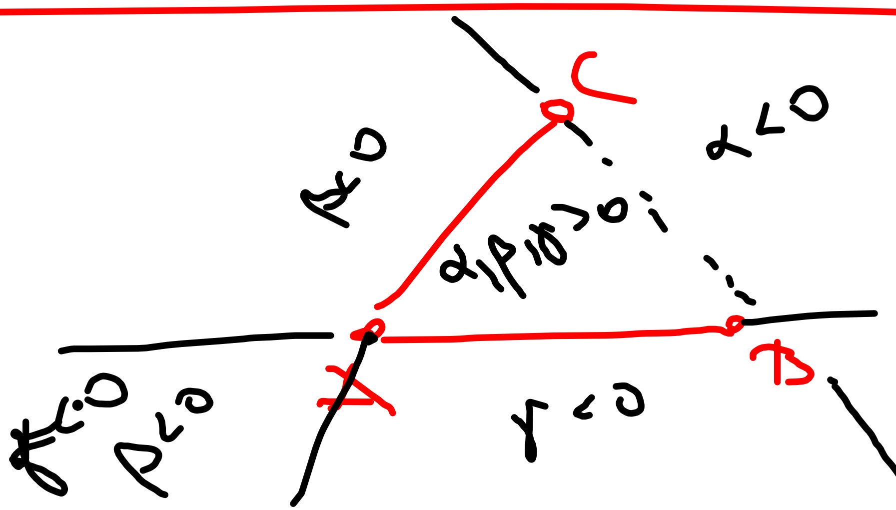
$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \delta = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow X \notin \mathcal{L}$ systém



$$X \in \overleftrightarrow{AB} \Leftrightarrow X = \alpha A + \beta B \,, \quad \alpha \geq 0, \ \beta \geq 0$$

$$\alpha + \beta = 1$$



$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$X \in \Delta ABC \Leftrightarrow \alpha \geq 0, \ \beta \geq 0, \ \gamma \geq 0$$