Matematika I – 12. přednáška
Diagonalizovatelné matice, symetrické matice

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

6. 5. 2009

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

Opakování z minula

Definice

Vlastní hodnota (též **vlastní číslo**) matice A je číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje (alespoň jeden) **nenulový** vektor $u \in \mathbb{C}^n$ s vlastností

$$A \cdot u = \lambda \cdot u.$$

Vektor u se pak nazývá **vlastní vektor** (eigenvector) matice A příslušející vlastní hodnotě (eigenvalue) λ.
Množina všech vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ (společně s nulovým vektorem) se nazývá **vlastní prostor** příslušející vlastní hodnotě λ a značíme ji $\mathrm{Eigen}(\lambda)$ (z angl./něm. *eigenspace*).

Opakování z minula

Definice

Algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu.
Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako dimenze příslušného vlastního prostoru $\mathrm{Eigen}(\lambda)$.

Opakování z minula

Definice

Algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu.
Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako dimenze příslušného vlastního prostoru $\mathrm{Eigen}(\lambda)$.

Věta

Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ navzájem různé vlastní hodnoty matice A, pak jsou jejich příslušné vlastní vektory $u_1, \ldots, u_k$ lineárně nezávislé.

Opakování z minula

Definice

Algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu. **Geometrická násobnost** vlastní hodnoty λ je definována jako dimenze příslušného vlastního prostoru $\mathrm{Eigen}(\lambda)$.

Věta

Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ navzájem různé vlastní hodnoty matice A, pak jsou jejich příslušné vlastní vektory $u_1, \dots, u_k$ lineárně nezávislé.

Tvrzení

Má-li matice A n lineárně nezávislých vlastních vektorů $u_1, \dots, u_n$ a označíme-li jako $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_n)$ příslušnou bázi, potom má lineární zobrazení L_A v této bázi **diagonální** *maticovou reprezentaci. Navíc, na hlavní diagonále jsou právě vlastní hodnoty příslušné (postupně) vlastním vektorům $u_1, \dots, u_n$.*

Plán přednášky

Diagonalizovatelné matice

Je-li A čtvercová matice řádu n, potom nás zajímá,

Kolik lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A vlastně má?

Diagonalizovatelné matice

Je-li A čtvercová matice řádu n, potom nás zajímá,

Kolik lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A vlastně má?

Pokud má matice A **plný počet (tj. n)** lineárně nezávislých vlastních vektorů, potom lze tuto matici *diagonalizovat*. Označme jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní hodnoty (nemusí být nutně všechny navzájem různé) a jako $u_1, \ldots, u_n$ příslušné lineárně nezávislé vlastní vektory (jako **sloupcové vektory!**), a položme

$$P := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \ldots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Matice P se nazývá **matice vlastních vektorů** a matice D se nazývá **matice vlastních hodnot**.

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže je podobná diagonální matici, tj. jestliže existuje diagonální matice D a regulární matice P takové, že platí

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{neboli} \quad D = P^{-1}AP.$$

Proces nalezení diagonální matice D a regulární matice P se nazývá **diagonalizace** matice A

Důsledek

Každá matice A, která má n navzájem různých vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže je podobná diagonální matici, tj. jestliže existuje diagonální matice D a regulární matice P takové, že platí

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{neboli} \quad D = P^{-1}AP.$$

Proces nalezení diagonální matice D a regulární matice P se nazývá **diagonalizace** matice A

Důsledek

Každá matice A, která má n navzájem různých vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.

Poznámka

Snadno se ukáže opačné tvrzení, tj. *každá diagonalizovatelná matice má n lineárně nezávislých vlastních vektorů* (což ale neznamená, že musí mít n různých vlastních hodnot).

Příklad

Podle předchozího tvrzení není matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

z diagonalizovatelná, protože má (jak jsme ukázali minule) pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ pro každou vlastní hodnotu λ_i matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ pro každou vlastní hodnotu λ_i matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.

Odtud plyne:

Algoritmus pro nalezení maximálního počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice

1. Najdeme všechny **navzájem různé** vlastní hodnoty matice A, označme je jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ *pro každou vlastní hodnotu* λ_i *matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.*

Odtud plyne:

Algoritmus pro nalezení maximálního počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice

1. Najdeme všechny **navzájem různé** vlastní hodnoty matice A, označme je jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
2. Pro každý index $i = 1, \ldots, k$ (tj. pro každou vlastní hodnotu λ_i), najdeme bázi příslušného podprostoru vlastních vektorů.

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ pro každou vlastní hodnotu λ_i matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.

Odtud plyne:

Algoritmus pro nalezení maximálního počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice

1. Najdeme všechny **navzájem různé** vlastní hodnoty matice A, označme je jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
2. Pro každý index $i = 1, \ldots, k$ (tj. pro každou vlastní hodnotu λ_i), najdeme bázi příslušného podprostoru vlastních vektorů.
3. Sjednocení všech vektorů z takto nalezených bází je **maximální** množina lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A. Má-li tato množina n prvků, potom je matice A diagonalizovatelná. Má-li tato množina méně než n prvků, potom matice A diagonalizovatelná není.

Mocniny diagonalizovatelných matic

Vzorec

$$A = PDP^{-1}$$

lze dobře využít k výpočtu mocnin diagonalizovatelných matic. Např. pro druhou mocninu matice A platí

$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

přičemž druhá mocnina diagonální matice je opět diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou druhými mocninami původních prvků, tj.

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Mocniny diagonalizovatelných matic

Vzorec
$$A = PDP^{-1}$$
lze dobře využít k výpočtu mocnin diagonalizovatelných matic. Např. pro druhou mocninu matice A platí
$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$
přičemž druhá mocnina diagonální matice je opět diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou druhými mocninami původních prvků, tj.
$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$
Podobně se ukáže pomocí matematické indukce (a pro záporná k pomocí tvrzení o vlastních hodnotách inverzní matice) , že
$$A^k = PD^kP^{-1}, \quad \text{kde} \quad D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Příklad

Určete A^k, kde $k \in \mathbb{Z}$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Určete A^k, kde $k \in \mathbb{Z}$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Ukázali jsme, že A má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné
$\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle$.
Vlastní vektor $(1,1,1)^T$ (či jeho libovolný nenulový násobek) je lineárně nezávislý s každým z vektorů $(-1,0,1)^T, (3,1,0)^T$ (či jejich libovolnou nenulovou lineární kombinací). Samozřejmě platí, že poslední 2 vektory jsou lineárně nezávislé, je tedy lineárně nezávislá celá trojice těchto vektorů.

Řešení (pokr.)

Odtud $A = PDP^{-1}$, kde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A má vlastní hodnotu 0, není proto regulární a A^k není pro $k < 0$ definováno.

Řešení (pokr.)

Odtud $A = PDP^{-1}$, kde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A má vlastní hodnotu 0, není proto regulární a A^k není pro $k < 0$ definováno.
Pro $k > 0$ pak jde o tzv. *idempotentní matici* (splňující $A^2 = A$), neboť

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 0^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = A,$$

Caley-Hamiltonova věta

Poslední důležitý vztah, který lze bezprostředně vyvodit z mocniny diagonalizovatelné matice, je tzv. Cayley-Hamiltonova věta, která říká, že **každá** (tzn. nejen diagonalizovatelná) matice *A je kořenem* svého charakterictického polynomu.

Caley-Hamiltonova věta

Poslední důležitý vztah, který lze bezprostředně vyvodit z mocniny diagonalizovatelné matice, je tzv. Cayley-Hamiltonova věta, která říká, že **každá** (tzn. nejen diagonalizovatelná) matice *A je kořenem* svého charakterictického polynomu.

Věta

Je-li A čtvercová matice řádu n a

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$$

její charakteristický polynom, potom platí identita

$$p(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E_n = 0.$$

Caley-Hamiltonova věta

Poslední důležitý vztah, který lze bezprostředně vyvodit z mocniny diagonalizovatelné matice, je tzv. Cayley-Hamiltonova věta, která říká, že **každá** (tzn. nejen diagonalizovatelná) matice A *je kořenem* svého charakterictického polynomu.

Věta

Je-li A čtvercová matice řádu n a

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$$

její charakteristický polynom, potom platí identita

$$p(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E_n = 0.$$

Důkaz.

Pro diagonalizovatelné matice je důkaz je přímým důsledkem předchozího. Tvrzení platí i pro obecné matice, kde je však třeba využítiejich Jordanova tvaru, čemuž se zde nevěnujeme. □

Plán přednášky

Symetrické matice

Definice

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice A se nazývá **symetrická**, pokud $A^T = A$.

Symetrické matice

Definice

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice A se nazývá **symetrická**, pokud $A^T = A$.

Přímo z definice a z vlastností transpozice se snadno dokáže

Věta

(i) *Pro libovolnou (třeba i obdélníkovou) matici* A *typu* $m \times n$ *jsou symetrické rovněž matice* $A^T A$ *řádu* n *a* AA^T.

(ii) *Je-li* A *symetrická (tedy čtvercová) matice, potom jsou následující symetrické také matice* A^k, *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$.

(iii) *Je-li* A *symetrická (tedy čtvercová) regulární matice, potom jsou symetrické také matice* A^{-1} *a* A^{-k}, *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$.

Příklad

Jsou-li A i B symetrické matice, potom jejich součin AB **nemusí** být symetrická matice! Vskutku, pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{jsou symetrické,}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{není symetrická.}$$

Příklad

Jsou-li A i B symetrické matice, potom jejich součin AB **nemusí** být symetrická matice! Vskutku, pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{jsou symetrické,}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{není symetrická.}$$

Tvrzení

Nechť A a B jsou symetrické matice. Potom je AB symetrická matice $\Leftrightarrow$ matice A a B komutují.

Příklad

Jsou-li A i B symetrické matice, potom jejich součin AB **nemusí** být symetrická matice! Vskutku, pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{jsou symetrické,}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{není symetrická.}$$

Tvrzení

Nechť A a B jsou symetrické matice. Potom je AB symetrická matice $\Leftrightarrow$ matice A a B komutují.

Důkaz.

Snadný. $\square$

Ukážeme, že symetrické matice mají většinu těch *dobrých* vlatností, které studujeme v souvislosti s vlastními hodnotami a vlastními vektory.

Věta

Nechť A je reálná symetrická matice řádu n. Potom vlastní hodnoty a vlastní vektory matice A mají následující vlastnosti.

(i) *Všechny vlastní hodnoty matice A jsou* **reálné**.

Ukážeme, že symetrické matice mají většinu těch *dobrých* vlatností, které studujeme v souvislosti s vlastními hodnotami a vlastními vektory.

Věta

Nechť A je reálná symetrická matice řádu n. Potom vlastní hodnoty a vlastní vektory matice A mají následující vlastnosti.

(i) *Všechny vlastní hodnoty matice A jsou* **reálné**.

(ii) *Pro každou vlastní hodnotu λ_i je její algebraická a geometrická násobnost stejná.*

Ukážeme, že symetrické matice mají většinu těch *dobrých* vlatností, které studujeme v souvislosti s vlastními hodnotami a vlastními vektory.

Věta

Nechť A je reálná symetrická matice řádu n. Potom vlastní hodnoty a vlastní vektory matice A mají následující vlastnosti.

(i) *Všechny vlastní hodnoty matice A jsou* **reálné**.

(ii) *Pro každou vlastní hodnotu λ_i je její algebraická a geometrická násobnost stejná.*

(iii) *Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou* **ortogonální**, *tj.* $\mathrm{Eigen}(\lambda_i) \perp \mathrm{Eigen}(\lambda_j) \quad$ *pro* $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Ukážeme, že symetrické matice mají většinu těch *dobrých* vlatností, které studujeme v souvislosti s vlastními hodnotami a vlastními vektory.

Věta

Nechť A je reálná symetrická matice řádu n. Potom vlastní hodnoty a vlastní vektory matice A mají následující vlastnosti.

(i) *Všechny vlastní hodnoty matice A jsou* **reálné**.

(ii) *Pro každou vlastní hodnotu λ_i je její algebraická a geometrická násobnost stejná.*

(iii) *Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou* **ortogonální**, *tj.* $\mathrm{Eigen}(\lambda_i) \perp \mathrm{Eigen}(\lambda_j)$ *pro* $\lambda_i \neq \lambda_j$.

(iv) *Matice A má n lineárně nezávislých vlastních vektorů, které tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$. Tuto bázi lze navíc vybrat tak, aby byla ortogonální (ortonormální). Tedy platí přímý součet $\mathbb{R}^n = \mathrm{Eigen}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eigen}(\lambda_k)$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou všechny navzájem různé vlastní hodnoty matice A.*

Poznámka

Pro vektory $u, v \in \mathbb{C}^n$ definujeme jejich **skalární součin** $\langle u, v\rangle$ jako (obecně) **komplexní** číslo

$$\langle u, v\rangle := u^T \cdot \bar{v} = u_1\,\bar{v}_1 + \cdots + u_n\,\bar{v}_n,$$

kde $\bar{v}_j$ je číslo komplexně sdružené s číslem v_j.
Takto je vlastnost pozitivní definitnosti $\langle u, u\rangle \geq 0$ zachována, symetrie se změní na vlastnost $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, a linearita v první i ve druhé složce zůstane také zachována, zatímco *vytýkání* z druhé složky zahrnuje komplexní sdruženost,
tj. $\langle \alpha\, u, v\rangle = \alpha\,\langle u, v\rangle, \qquad \langle u, \alpha\, v\rangle = \bar{\alpha}\,\langle u, v\rangle.$

Poznámka

Pro vektory $u, v \in \mathbb{C}^n$ definujeme jejich **skalární součin** $\langle u, v \rangle$ jako (obecně) **komplexní** číslo

$$\langle u, v \rangle := u^T \cdot \bar{v} = u_1\, \bar{v}_1 + \cdots + u_n\, \bar{v}_n,$$

kde $\bar{v}_j$ je číslo komplexně sdružené s číslem v_j.
Takto je vlastnost pozitivní definitnosti $\underline{\langle u, u \rangle} \geq 0$ zachována, symetrie se změní na vlastnost $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, a linearita v první i ve druhé složce zůstane také zachována, zatímco *vytýkání* z druhé složky zahrnuje komplexní sdruženost,
tj. $\langle \alpha\, u, v \rangle = \alpha\, \langle u, v \rangle, \qquad \langle u, \alpha\, v \rangle = \bar{\alpha}\, \langle u, v \rangle.$
Potom pro symetrickou matici A zřejmě platí

$$\langle Au, v \rangle = (Au)^T \cdot \bar{v} = u^T \cdot A^T \cdot \bar{v} = u^T \cdot A \cdot \bar{v} = u^T \cdot \overline{Av} = \langle u, Av \rangle.$$

Poznámka

Všimněte si, že norma indukovaná tímto skalárním součinem je

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u^T \cdot \bar{u}} = \sqrt{\bar{u}^T \cdot u}$$

a splňuje vlastnosti normy, zejména je výraz $u \cdot \bar{u}$ **reálné** číslo. Pro reálné vektory se výše uvedený skalární součin a norma shodují se skalárním součinem a normou definovanými dříve.

Poznámka

Všimněte si, že norma indukovaná tímto skalárním součinem je

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{u^T \cdot \bar{u}} = \sqrt{\bar{u}^T \cdot u}$$

a splňuje vlastnosti normy, zejména je výraz $u \cdot \bar{u}$ **reálné** číslo. Pro reálné vektory se výše uvedený skalární součin a norma shodují se skalárním součinem a normou definovanými dříve.
Tento komplexní skalární součin budeme potřebovat pouze pro důkaz faktu, že vlastní hodnoty symetrické matice A jsou reálné. Odtud pak plyne, že i všechny vlastní vektory jsou reálné a jsme tedy pak již v předchozí situaci reálného skalárního součinu.

Pozitivně a negativně definitní matice

Níže uvedené symetrické matice hrají důležitou roli v diferenciálním počtu více proměnných (viz později `MB103`) při určování extrémů funkcí.

Definice

Symetrická matice A se nazývá

- **pozitivně definitní**, píšeme $A > 0$, jestliže $\langle Au, u \rangle > 0$
- **pozitivně semidefinitní**, píšeme $A \geq 0$, jestliže $\langle Au, u \rangle \geq 0$
- **negativně definitní**, píšeme $A < 0$, jestliže $\langle Au, u \rangle < 0$
- **negativně semidefinitní**, píšeme $A \leq 0$, jestliže $\langle Au, u \rangle \leq 0$

pro všechny vektory $u \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

Pozitivně či negativně (semi)definitní matice poznáme snadněji než z definice podle následujících kritérií, využívajících vlastní hodnoty či tzv. **hlavní minory**.

Definice

Vedoucí hlavní minory čtvercové matice A jsou determinanty podmatic, které vzniknou z matice A vynecháním posledních několika (postupně $n-1$, $n-2$, až 0) jejích řádků a sloupců.
Hlavní minory matice A jsou determinanty podmatic, které vzniknou z matice A vynecháním stejné skupiny řádků a sloupců.

Poznámka

Můžeme tedy například vynechat první a třetí řádek a sloupec a takto vytvořit hlavní minor (takovýto hlavní minor ale zřejmě není vedoucí hlavní minor).

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj.* $\lambda_i > 0 \ \forall i$,

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj. $\lambda_i > 0 \ \forall i$,*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj. $\lambda_i > 0\ \forall i$,*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj.* $\lambda_i > 0\ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj.* $\lambda_i \geq 0\ \forall i$,

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj. $\lambda_i > 0 \ \forall i$,*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj. $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$,*

$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj.* $\lambda_i > 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj.* $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

(iii) *Matice A je negativně definitní*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj. $\lambda_i > 0 \ \forall i$,*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj. $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$,*

$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

(iii) *Matice A je negativně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou záporné, tj. $\lambda_i < 0 \ \forall i$,*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj.* $\lambda_i > 0 \ \forall i$,
$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj.* $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$,
$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

(iii) *Matice A je negativně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou záporné, tj.* $\lambda_i < 0 \ \forall i$,
$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným.*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj.* $\lambda_i > 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj.* $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

(iii) *Matice A je negativně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou záporné, tj.* $\lambda_i < 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným.*

(iv) *Matice A je negativně semidefinitní*

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj.* $\lambda_i > 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj.* $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

(iii) *Matice A je negativně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou záporné, tj.* $\lambda_i < 0 \ \forall i$,

$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným.*

(iv) *Matice A je negativně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nekladné, tj.* $\lambda_i \leq 0 \ \forall i$,

Věta

Nechť A je symetrická matice řádu n.

(i) *Matice A je pozitivně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou kladné, tj.* $\lambda_i > 0\ \forall i$,
$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory jsou kladné.*

(ii) *Matice A je pozitivně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nezáporné, tj.* $\lambda_i \geq 0\ \forall i$,
$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory jsou nezáporné.*

(iii) *Matice A je negativně definitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou záporné, tj.* $\lambda_i < 0\ \forall i$,
$\Leftrightarrow$ *všechny její vedoucí hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným.*

(iv) *Matice A je negativně semidefinitní*

$\Leftrightarrow$ *všechny její vlastní hodnoty jsou nekladné, tj.* $\lambda_i \leq 0\ \forall i$,
$\Leftrightarrow$ *všechny její hlavní minory lichého stupně jsou nekladné a všechny její hlavní minory sudého stupně jsou nezáporné.*

Příklad

Symetrická matice řádu $n = 2$ má tvar

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Potom je matice A **pozitivně definitní**, pokud $a > 0, |A| = ad - b^2 > 0$, zatímco matice A je **negativně definitní**, pokud $a < 0, |A| = ad - b^2 > 0$ (vedoucí hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným). .

Příklad

Symetrická matice řádu $n = 2$ má tvar

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Potom je matice A **pozitivně definitní**, pokud $a > 0, |A| = ad - b^2 > 0$, zatímco matice A je **negativně definitní**, pokud $a < 0, |A| = ad - b^2 > 0$ (vedoucí hlavní minory střídají znaménka, počínaje záporným). .
Matice A je **pozitivně semidefinitní**, pokud $a \geq 0, d \geq 0, |A| = ad - b^2 \geq 0$ (všechny hlavní minory jsou nezáporné, zatímco matice A **negativně semidefinitní**, pokud $a \leq 0, \quad d \leq 0$, (všechny hlavní minory stupně 1 (lichý stupeň) jsou nekladné), $|A| = ad - b^2 \geq 0$, (všechny hlavní minory stupně 2 (sudý stupeň) jsou nezáporné).