Vektorové prostory

Petr Pupík

8.4.2009

Obsah

Souřadnice vektoru

Věta

Nechť V je vektorový prostor. Potom vektory $u_1, \dots, u_n \in V$ tvoří bázi vektorového prostoru V právě tehdy, když každý vektor $\underline{x} \in V$ lze **jediným** způsobem vyjádřit ve tvaru $\underline{x} = t_1 \underline{u_1} + \dots + t_n \underline{u_n}$.

Důkaz

„$\Rightarrow$“ Sporem. Nechť existují dvě taková vyjádření:

$$\underline{x} = t_1 \underline{u_1} + \dots + t_n \underline{u_n} = \bar{t}_1 \underline{u_1} + \dots + \bar{t}_n \underline{u_n}.$$

Potom $\underline{o} = (t_1 - \overline{t_1}) \underline{u_1} + \dots + (t_n - \overline{t_n}) \underline{u_n}$. Potom $t_i = \overline{t_i}$.

„$\Leftarrow$“ Zřejmé.

Souřadnice vektoru

Definice

Koeficienty $(t_1, \ldots, t_n)$ z předchozí věty nazýváme souřadnice vektoru x.

Poznámka

- Podle předchozí věty jsou koeficienty určeny jednoznačně.
- V jiné bázi bude mít tentýž vektor jiné souřadnice.

Souřadnice vektoru

Příklad

Vektor $\underline{w} = (3, 2, 1)$ má ve standardní bázi $(\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3})$ prostoru $\mathbb{R}^3$ souřadnice

$$\underline{w} = (3, 2, 1),$$

zatímco v bázi $((1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0))$ má $\underline{w}$ souřadnice

$$\underline{w} = (1, 1, 1)$$

protože $\underline{w} = (3, 2, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 0, 0)$.

Všimněme si, že když říkáme **vektor** $\underline{w} = (3, 2, 1)$, tak tím vlastně automaticky myslíme tento vektor vztažený ke standardní bázi $(\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3})$.

Obsah

Lineární zobrazení

Definice

Nechť V, V' jsou dva vektorové prostory. Zobrazení $\varphi : U \to V$ splňující vztahy:

- $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
- $\varphi(t \cdot u) = t \cdot \varphi(u)$ pro libovolné $u, v \in V$, $t \in \mathbb{R}$, se nazývá lineární zobrazení. Je-li navíc φ bijekce, nazývá se izomorfismus.

Lineární zobrazení

Příklad

- Nechť V, V' jsou dva vektorové prostory. Potom zobrazení $\varphi : V \to V'$ definované vztahem $\varphi(\underline{u}) = \underline{o}$ je lineární zobrazení.
- Nechť $V = \mathbb{R}^3$, $V' = \mathbb{R}^2$. Potom zobrazení $\varphi : V \to V'$ definované vztahem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_3, x_1 - x_2 - x_3)$ je lineární zobrazení.
- Nechť $V = \mathbb{R}^3$, $V' = \mathbb{R}^3$. Potom zobrazení $\varphi : V \to V'$ definované vztahem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_3 + 1, x_1 - x_2 - x_3, x_3)$ není lineární zobrazení.

Lineární zobrazení

Věta

Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Potom platí:

- $\varphi(\underline{o}) = \underline{o}'$,
- $\varphi(-\underline{u}) = -\varphi(\underline{u})$,
- Jsou-li vektory $\underline{u_1}, \dots, \underline{u_k} \in V$ lineárně závislé vektory, potom jsou i $\varphi(\underline{u_1}), \dots, \varphi(\underline{u_k}) \in V'$ lineárně závislé.

Lineární zobrazení

Věta

Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení, U podprostor V. Potom platí:

- $\varphi(U)$ je podprostor V',
- Jsou-li vektory $\underline{u_1}, \dots, \underline{u_k} \in V$ generátory podprostoru U, potom jsou vektory $\varphi(\underline{u_1}), \dots, \varphi(\underline{u_k}) \in V'$ generátory podprostoru $\varphi(U)$.
- $\dim U \geq \dim U$.

Lineární zobrazení

Věta

Nechť $\varphi : V \rightarrow V'$, $\psi : V' \rightarrow V''$ jsou lineární zobrazení, potom zobrazení $\psi \circ \varphi$ je také lineární zobrazení.

Lineární zobrazení

Základní věta o lineárních zobrazeních

Nechť V, V' jsou vektorové prostory, $\underline{u_1}, \dots, \underline{u_n}$ je báze V. Nechť $\underline{v_1'}, \dots, \underline{v_n'} \in V'$. Potom existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ takové, že $\varphi(\underline{u_1}) = \underline{v_1'}, \dots, \varphi(\underline{u_n}) = \underline{v_n'}$.

Lineární zobrazení

Definice

Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Potom množina $\operatorname{Ker}\varphi = \{\underline{u} \in V \mid \varphi(\underline{u}) = \underline{o}\}$ se nazývá jádro lineárního zobrazení φ.
Množina $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(V)$ se nazývá obraz lineárního zobrazení φ.

Věta

$\operatorname{Ker}\varphi$ je podprostor V, $\operatorname{Im}\varphi$ je podprostor V'.

Lineární zobrazení

Věta

Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Pak φ je injektivní právě tehdy, když $\operatorname{Ker} \varphi = \{\underline{o}\}$.

Věta

Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení. Potom platí:

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V.$$

Lineární zobrazení

Věta

Nechť $\varphi : V \to V'$ je izomorfismus, $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k \in V$. Potom platí

- $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ jsou lineárně závislé $\Leftrightarrow \varphi(\underline{u}_1), \dots, \varphi(\underline{u}_k)$ jsou lineárně závislé.
- $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ jsou lineárně nezávislé $\Leftrightarrow \varphi(\underline{u}_1), \dots, \varphi(\underline{u}_k)$ jsou lineárně nezávislé.
- $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ tvoří bázi $V \Leftrightarrow \varphi(\underline{u}_1), \dots, \varphi(\underline{u}_k)$ tvoří bázi V'.
- $\dim V = \dim V'$,

Lineární zobrazení

Věta o izomorfismu vektorových prostorů

Nechť V, V' jsou vektorové prostory. Potom $V \cong V' \Leftrightarrow \dim V = \dim V'$.

Obsah

Lineární transformace

Definice

Nechť V je vektorový prostor. Potom lineární zobrazení $\varphi : V \to V$ se nazývá lineární transformace vektorového prostoru V. Je-li φ navíc bijektivní, nazývá se automorfismus.

Lineární transformace

Věta

Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V. Potom následující pvýroky jsou ekvivalentní:

1. φ je automorfismus,
2. φ je injektivní,
3. φ je surjektivní,
4. φ zobrazuje libovolnou bázi V opět na bázi V,
5. φ zobrazuje libovolné lineárně nezávislé vektory opět na lineárně nezávisé vektory.

Lineární transformace

Definice

Nechť φ je lineární transformace vektorového prostoru V.
Nechť $\underline{u_1}, \dots, \underline{u_n}$ je pevná báze V a nechť platí:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{u_1}) &= a_{11}\underline{u_1} + a_{21}\underline{u_2} + \cdots + a_{n1}\underline{u_n} \\ \vdots &= \ddots \vdots \\ \varphi(\underline{u_n}) &= a_{1n}\underline{u_1} + a_{2n}\underline{u_2} + \cdots + a_{nn}\underline{u_n} \end{aligned}$$

Potom matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ se nazývá matice lineárná transformace φ v bázi $\underline{u_1}, \dots, \underline{u_n}$

Lineární transformace

Věta

Nechť φ, ψ jsou lineární transformace vektorového prostoru V, A, B jejich matice, $t \in \mathbb{R}$. Potom i zobrazení $\varphi + \psi$, $\varphi \circ \psi$, $t\varphi$ jsou lineární transformace, jejichž maticemi jsou $A + B$, $A \cdot B$, tA.

Lineární transformace

Věta

Dvě matice A, B jsou maticemi téže transformace ve stejné bázi právě tehdy, když existuje regulární matice S taková, že $B = S^{-1}AS$.

Definice

Řekneme, že dvě matice A, B jsou podobné právě tehdy, když existuje regulární matice S taková, že $B = S^{-1}AS$.

Věta

Relace podobnost matic je relací ekvivalence na množině všech matic daného řádu.