L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo je docela silným nástrojem pro výpočet mnoha limit.

Věta. *Buď* $x_0 \in \mathbb{R}^*$. *Nechť je splněna jedna z podmínek*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

(ii) $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.

Poznámky:

1. Je nutné, aby opravdu byly splněny podmínky dané věty! Tj. pravidlo se nedá použít pro výpočet limit „$\frac{cokoliv}{0}$“ a podobně.
2. Taky se může stát, že $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nemusí existovat, to ale neznamená, že neexistuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$!
3. L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít i vícekrát v řadě, tj. může se stát, že i po použití L.P. dostaneme výraz, který splňuje předpoklady věty. V takovém případě použijeme L.P. ještě jednou atd.

Ilustrujme použití na následujících příkladech:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} =$ „$\frac{0}{0}$“ $= \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x-3} = \frac{-1}{1} = -1$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} =$ „$\frac{0}{0}$“ $= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} =$ „$\frac{0}{0}$“ $= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} =$ „$\frac{0}{0}$“ $= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

L'Hospitalova pravidla užíváme k určení limit tzv. neurčitých výrazů:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

První dva případy lze řešit přímo užitím L.P. ostatní je možno převést na první následovně:

- $\infty - \infty$: $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$
- $0 \cdot \infty$: $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
- $0^0, \infty^0, 1^\infty$: $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$

Vypočítejte limity:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+5x-2}{x^2-1}$

b) $\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \arctan x) \ln x$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

d) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x})$

e) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$

f) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})^{\sin x}$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$

h) $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) \cdot \ln(1-x)$

i) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$

j) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x*\sin x} - \frac{1}{x**2}\right)$

k) $\lim_{x\to 0}(1 + 3\tan^2 x)^{\mathrm{cotg}^2 x}$

l) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$

Výsledky: a)∞ b)0 c)2 d)$-\frac{1}{3}$ e)1 f)1 g)0 h)0 i)$\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$ j)$\frac{1}{6}$ k)e^3 l)0