$f_n = n \cdot f(n-1)$, $f_0 = 1$ $\boxed{f_n = n!}$

$F(n, f(n)) = f(n+1)$

① Vklad 1000 Kč. Úrok 3% per annum

1) ročně

2) měsíčně

Řešení: 1. ledna vložím 1000 Kč

31. prosince $1{,}03 \cdot 1000 = 1030$ } 1)

ad 2) q koeficient měsíčního úročení, tj.

$$q^{12} = 1{,}03 \Rightarrow q = (1{,}03)^{1/12}$$

$$\boxed{f(n) = q \cdot f(n-1)}$$

homogenní dif. rovnice 1. řádu

② Kupujeme auto za 300 000 Kč. Na splátky s úrokem 6% ročně, měsíčně.
Jestliže chceme splatit za 3 roky, kolik budeme platit měsíčně.

Řešení: dluh $f(n)$ po n měsících. Chceme

$f(36) = 0$, $f(0) = 300.000 = C$.

$$f(n) = \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right) \cdot f(n-1) - S$$

← splátka

obecně: $\boxed{f(n) = a \cdot f(n-1) + b}$, $a, b \in \mathbb{R}$

pro $b = 0$ víme že $f(n) = K \cdot a^n$ ← konstanta

v obecné řeš.

všechna řešení →

+ 1 konkrétní řešení $g(n) = a \cdot g(n-1) + b$

přičtení $f(n) = K a^n + g(n)$ ... obecné řešení přidružené rovnice

$$f(n) = \underbrace{1{,}005}_{=a} \cdot f(n-1) \underbrace{- S}_{=-b}$$

$$f = 1{,}005 \cdot f - S \quad \Rightarrow \quad S = 0{,}005 \cdot f$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = \frac{S}{0{,}005}$$

obecné řešení $\boxed{f(n) = K \cdot (1{,}005)^n + \frac{S}{0{,}005}}$

pro $n = 0$ $\quad C = K + \frac{S}{0{,}005}$

$$\Rightarrow \quad K = C - \frac{S}{0{,}005}$$

$\Rightarrow$ řešení rovnice s počáteční podmínkou

$$f(n) = \left(C - \frac{S}{0{,}005}\right)(1{,}005)^n + \frac{S}{0{,}005}$$

$\Rightarrow$ pro $f(36) = 0$ vyjde podobně

$$S = 300.000 \left(\frac{0{,}005}{1-(1{,}005)^{-36}} \right) \doteq 9127$$

(3) Totéž zadání. Jak dlouho budeme splácet, při splátce 5.000/měsíc.

vyřešit tuto funkci: $S = 5.000$ vyjde 72 splátek.

(5) $\underline{f(n+2) = f(n+1) + f(n)}$ $f(0) = 1,\ f(1) = 1$

$f(n) = K\lambda^n$: $K\lambda^{n+2} - K\lambda^{n+1} - K\lambda^n = 0$

$$\underbrace{K\lambda^n}_{\neq 0}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ obecné řešení

$f(n) = K_1\lambda_1^n + K_2\lambda_2^n$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= K_1 + K_2 = 1 \\ f(1) &= K_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + K_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_1, K_2$$

(5) V ČR 1200 umře na leukémii /ročně.
Pravděpodobnost, že ve městě zhruba 500 lidí x aspoň 1 zemře za posledních 10 let.

Řešení: pravděpodobnost pro 1 člověka za 1 rok je $1200/10^7$. Že neumře je $\left(1-\frac{12}{10^5}\right)$ ročně tj. $\left(1-\frac{12}{10^5}\right)^{10}$ je pravděpodobnost, že neumře za 10 let.

(6) Ve výtahu je 5 osob, v domě 8 pater.
Pravděpodobnost výstupu je po každém vždy stejná.
Jaká je pravděpodobnost, že:

1) vystoupí v 6. patře
2) vystoupí ve stejném patře
3) každý v jiném patře

Řešení: Všech možností: 8^5

1) 1 příznivá možnost $\Rightarrow p = 1/8^5$
2) 8 -"- $\Rightarrow p = 1/8^4$
3) $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4$ -"- $\Rightarrow p = \dfrac{v(5,8)}{V(5,8)} = \dfrac{8\cdot7\cdot5\cdot6\cdot4}{8^5}$

(7) 200 poslanců, 2 strany. Místo voleb hází minci (poctivou).

Jaká je pravděpodobnost výsledku 100/100.

Řešení: 2^{200} možných výsledků

$\binom{200}{100}$ příznivých

$$p = \binom{200}{100}\cdot 2^{-200} \doteq 0{,}056$$

Jaká je pravděpodobnost, že jedna ze stran bude mít většinu alespoň 10 mandátů?

vyřešíme později

(8) Točíš, ale s nepoctivou mincí, je pravděpodobnost α na první stranu, $1-\alpha$ na druhou.

Řešení: musí 1. strana k nastat, tj.:

$$\alpha^{k}(1-\alpha)^{200-k}\binom{200}{k}$$

(9) Hod 2 kostkami. Nepadla dvojka. Pravděpodobnost součtu 7?

Řešení:
$$\underbrace{P(A \mid B)}_{} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{4}{36-11} = \frac{4}{25}$$

jev A = součet 7

→ podmínka