Drsná matematika I – 4. praktická přednáška
Relace a zobrazení

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

16. 3. 2010

Plán přednášky

1. Ještě rovina
2. Relace a zobrazení
3. Ekvivalence
4. Divné skaláry

Příklad 1. Sestrojte $(2n+1)$-úhelník, jsou-li dány všechny středy jeho stran.
(K řešení využijeme toho, že složením lichého počtu středových souměrností je opět středová souměrnost. Pro zobrazení obdržené složením středových symetrií postupně podle daných středů stran první vrchol pevným bodem, proto středem výsledné symetrie.)

Plán přednášky

1. Ještě rovina
2. Relace a zobrazení
3. Ekvivalence
4. Divné skaláry

Příklad 2. Rozhodněte, zda následující relace na množině M jsou relace ekvivalence:

1. $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $(f \sim g) \iff f(0) = g(0)$.
2. $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $(f \sim g) \iff f(0) = g(1)$.
3. M je množina přímek v rovině, dvě přímky jsou v relaci, jestliže se neprotínají.
4. M je množina přímek v rovině, dvě přímky jsou v relaci, jestliže jsou rovnoběžné.
5. $M = \mathbb{N}$, $(m \sim n) \iff S(m) + S(n) = 20$, kde $S(n)$ značí ciferný součet čísla n.

Příklad 3. Určete počet injektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

Příklad 4. Určete počet surjektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ na množinu $\{1, 2, 3\}$ (Počet zjistíme např. využitím obecného principu „inkluze a exkluze“.)

Plán přednášky

1. Ještě rovina
2. Relace a zobrazení
3. Ekvivalence
4. Divné skaláry

Příklad 5. Je ekvivalencí relace, pro kterou jsou dva vektory v $\mathbb{R}^2$ v relaci právě, když se liší o násobek pevně zvoleného vektoru v? Pokud ano, objasněte, co jsou třídy ekvivalence v tomto případě.
Příklad 6. Určete počet relací ekvivalence na množině $\{1, 2, 3, 4\}$. (Ekvivalence můžeme počítat podle toho, kolik prvků mají jejich třídy rozkladu.)

Plán přednášky

1. Ještě rovina
2. Relace a zobrazení
3. Ekvivalence
4. Divné skaláry

Příklad 7.

Najděte nenulový mnohočlen s koeficienty v $\mathbb{Z}_7$, tj. výraz typu $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{Z}_7$, $a_n \neq 0$, takový, že na množině $\mathbb{Z}_7$ nabývá pouze nulových hodnot (tj. dosadíme-li za x libovolný z prvků $\mathbb{Z}_7$ a výraz v $\mathbb{Z}_7$ vyčíslíme, dostaneme vždy nulu).

Poznámka: při konstrukci takového mnohočlenu můžeme využít tzv. Malou Fermatovu větu, která říká, že pro livovolné prvočíslo p a číslo a s ním nesoudělné platí:

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p).$$