Drsná matematika I – 6. praktická přednáška
Determinanty

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

29. 3. 2010

Plán přednášky

1. Permutace a pořadí
2. Determinanty
3. Determinant a inverzní matice

Pro $\mathbb{R}^2$ je determinant matice A zobrazení

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Prozrazuje např., jestli umíme najít inverzi k A.
Vzorec lze číst tak, že postupně sestavíme pořadí, ve kterém bereme prvky ze sloupců po jednotlivých řádcích, opatříme znaménkem a vše sečteme.
Stejně budeme činit pro vyšší dimenze.

Bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá **permutace množiny** X.
Berme $X = \{1, 2, \dots, n\}$ a pišme permutace pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá **permutace množiny** X.
Berme $X = \{1, 2, \dots, n\}$ a pišme permutace pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Transpozice je taková permutace, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ s $\sigma(x) = y$ a $\sigma(z) = z$ pro všechna ostatní $z \in X$. Cyklus je permutace, ve které se jejím opakováním každý prvek postupně dostane na všechny pozice.
Každá permutace je složením cyklů, každý cyklus je složením transpozic.

Bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá **permutace množiny X**.
Berme $X = \{1, 2, \dots, n\}$ a pišme permutace pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Transpozice je taková permutace, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ s $\sigma(x) = y$ a $\sigma(z) = z$ pro všechna ostatní $z \in X$. Cyklus je permutace, ve které se jejím opakováním každý prvek postupně dostane na všechny pozice.
Každá permutace je složením cyklů, každý cyklus je složením transpozic.
Parita (znaménko) permutace je dána sudým nebo lichým počtem transpozic, ze kterých se skládá.

Příklad 1. Napište permutaci

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

jako složení transpozic. Je tato permutace sudá nebo lichá?

Plán přednášky

1. Permutace a pořadí
2. Determinanty
3. Determinant a inverzní matice

Pro matici $A = (a_{ij})$ dimenze n nad $\mathbb{K}$ je její determinant skalár $\det A = |A|$

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \ldots, n\}$ a znaménko sgn je její paritou.

Pro matici $A = (a_{ij})$ dimenze n nad $\mathbb{K}$ je její determinant skalár $\det A = |A|$

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \ldots, n\}$ a znaménko sgn je její paritou.
Každý z výrazů $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ nazýváme **člen determinantu** $|A|$.

Podobně pro $n = 3$ se dá uhodnout (chceme linearitu v každém sloupci a antisymetrii)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tomuto vzorci se říká **Saarusovo pravidlo**.

Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n na skaláry z $\mathbb{K}$ definujeme **matici transponovanou** k A. Jde o matici $A^T = (a'_{ij})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$ typu n/m.

Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n na skaláry z $\mathbb{K}$ definujeme **matici transponovanou** k A. Jde o matici $A^T = (a'_{ij})$ s prvky $a'_{ij} = a_{ji}$ typu n/m.
Čtvercová matice A s vlastností $A = A^T$ se nazývá **symetrická**. Jestliže platí $A = -A^T$, pak se A nazývá antisymetrická.

Theorem

Pro každou čtvercovou matici A platí

1. $|A^T| = |A|$,
2. *Je-li jeden řádek v A tvořen nulovými prvky z* $\mathbb{K}$, *pak* $|A| = 0$,
3. *Jestliže matice B vznikla z A výměnou dvou řádků, pak* $|A| = -|B|$,
4. *Jestliže matice B vznikla z A vynásobením řádku skalárem* $a \in \mathbb{K}$, *pak* $|B| = a|A|$,
5. *Jsou-li prvky k-tého řádku v A tvaru* $a_{kj} = c_{kj} + b_{kj}$ *a všechny ostatní řádky v maticích* A, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ *jsou stejné, pak* $|A| = |B| + |C|$,
6. *Determinant* $|A|$ *se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.*

Pro matici v řádkovém nebo sloupcovém schodovitém tvaru je jediným nenulovým členem determinantu ten, který odpovídá identické permutaci:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

To dává efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody.

Příklad 2. Spočtěte několik determinantů volně zvolených matic metodou převedení na schodovitý tvar.

Cauchyova věta

Theorem

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *jsou čtvercové matice dimenze* n *nad okruhem skalárů* $\mathbb{K}$. *Pak* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Příklad 3. Spočtěte pomocí Cauchyovy věty, jak mění hodnotu determinantu elementární úpravy matic.

Příklad 4. Spočtěte bez Caychyovy věty i s ní determinant součinu dvou volně vybraných matic 3x3.

Definition (Minory a algebraické doplňky matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_\ell} \end{pmatrix}$$

typu k/ℓ nazýváme **submaticí matice** A určenou řádky $i_1, \ldots, i_k$ a sloupci $j_1, \ldots, j_\ell$.

Definition (Minory a algebraické doplňky matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_\ell} \end{pmatrix}$$

typu k/ℓ nazýváme **submaticí matice** A určenou řádky $i_1, \ldots, i_k$ a sloupci $j_1, \ldots, j_\ell$.
Zbývajícími $(m - k)$ řádky a $(n - l)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m - k)/(n - \ell)$, která se nazývá **doplňková submatice** k M v A. Při $k = \ell$ je definován $|M|$, který nazýváme **subdeterminant** nebo **minor** řádu k matice A.

Definition (Minory a algebraické doplňky matice - pokračování)

Je-li $m = n$, pak při $k = \ell$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá doplněk minoru $|M|$, nebo doplňkový minor k submatici M v matici A. Skalár

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá **algebraický doplněk** k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají **hlavní submatice**, jejich determinanty **hlavní minory** matice A.

Definition (Minory a algebraické doplňky matice - pokračování)

Je-li $m = n$, pak při $k = \ell$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá doplněk minoru $|M|$, nebo doplňkový minor k submatici M v matici A. Skalár

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá **algebraický doplněk** k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají **hlavní submatice**, jejich determinanty **hlavní minory** matice A.
Při speciální volbě $k = \ell = 1, \; m = n$ hovoříme o **algebraickém doplňku** A_{ij} prvku a_{ij} matice A.

Laplaceova věta

Theorem

Nechť $A = (a_{ij})$ *je čtvercová matice dimenze* n *nad libovolným okruhem skalárů a nechť je pevně zvoleno* k *jejích řádků. Pak* $|A|$ *je součet všech* $\binom{n}{k}$ *součinů* $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ *minorů řádu* k *vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceova věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Této metodě výpočtu se říká **Laplaceův rozvoj** podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i-tého řádku nebo i-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku (minoru stupně 1) a_{ij}. Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

Příklad 5. Spočtěte několik determintů matic metodou Laplaceova rozvoje, resp. kombinací s eliminací.

Plán přednášky

1 Permutace a pořadí

2 Determinanty

3 Determinant a inverzní matice

Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A. Nazýváme ji **algebraicky adjungovaná matice** k matici A.

Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A. Nazýváme ji **algebraicky adjungovaná matice** k matici A.

Theorem

Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ platí

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot E.$$

Zejména tedy

1. *A^{-1} existuje jako matice nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ právě, když $|A|^{-1}$ existuje v $\mathbb{K}$.*
2. *Pokud existuje A^{-1}, pak platí $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.*

Příklad 6. Ověřte existenci inverzní matice pro konkrétní příklady nad okruhy skalárů $\mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{Z}$.