• $v - f(v) \in \ker f$ neboť

$f(v - f(v)) = f(v) - \underbrace{f(f(v))}_{f} = 0$

• $v \in \operatorname{Im} f$, tedy $v = f(w)$

$v \in \ker f$, pak $f(v) = 0$

$\Big\}\ f(v) = \underbrace{f(f(w))}_{f} = 0$

Tedy $f(w) = 0$, ale $v = f(w) = 0$

Tedy $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\}$.

$V = W \oplus U$ projekce V na W podél U je $v \mapsto w$

$v = w + u$ -"- z V na U podél W je $v \mapsto u$

označíme f označíme g

f, g projekce $f: v \mapsto w$ $f + g: v \mapsto w + u = v$

$g: v \mapsto u$

Tedy $f + g = id_V$.

- $W \subseteq V$, $W^\perp = \{u \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \ \forall v \in W\}$

$u_1, u_2 \in W^\perp \Longrightarrow u_1 + u_2 \in W^\perp$

(ukážeme)

$u_1 + u_2 \in W^\perp \Leftrightarrow \langle u_1 + u_2, v \rangle = 0 \ \forall v \in W$

Ale $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \underbrace{\langle u_1, v \rangle}_{0} + \underbrace{\langle u_2, v \rangle}_{0} = 0$ o.k.

neboť $u_1 \in W^\perp$ $u_2 \in W^\perp$

- $(u_1, \ldots, u_k)$ báze na W

Pak $\forall$ vektor $v \in W^\perp$ splňuje $\underbrace{v \perp u_1, \ldots, v \perp u_k}_{\text{celkem } k \text{ lineárních podmínek}}$.

$v \perp u_1$ znamená $\langle v, u_1 \rangle = 0$

lineární rovnice

Celkem dostaneme soustavu k lin. rovnic s nulovou pravou stranou. Dimenze $W^\perp$ je alespoň $n-k$, $n = \dim V$. Celkem $V = W \oplus W^\perp$

G-S. ortogonalizační proces

Mějme generátory $u_1, \dots, u_k$ prostoru V.

Najdeme ortogonální bázi $v_1, v_2, \dots, v_l$, $l \le k$.

- $v_1 := u_1$ (jestliže $u_1 \neq 0$)
- v_2 zvolíme tak, že $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ a platí

Hledáme v_2 t. ž. rovnic $\langle \{ \underset{\overset{\|}{v_1}}{u_1}, u_2 \} \rangle = \langle \{ v_1, v_2 \} \rangle$

$v_2 = u_2 + a v_1 \;/\; \langle -, v_1 \rangle$

$\underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{0} = \langle u_2, v_1 \rangle + a \langle v_1, v_1 \rangle \Rightarrow a = - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$

Tím jsme našli v_2

Kolmé projekce $(\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{\text{o-n. báze } W}, e_{k+1}, \dots, e_n)$

ortonormální báze V

$W \subseteq V$ Pak lib. $v \in V$ má tvar

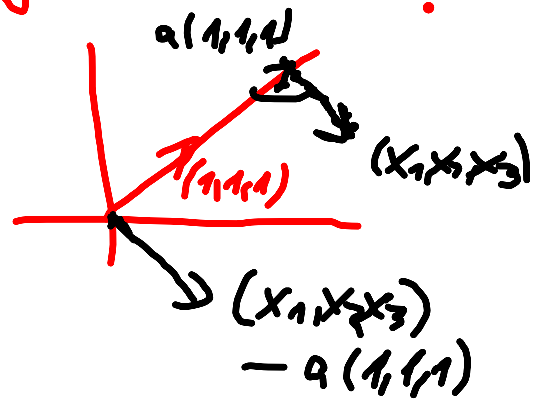
$v = x_1 e_1 + \dots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \dots + x_n e_n$

kolmá projekce na W je $v \longmapsto x_1 e_1 + \dots + x_k e_k$.

Př: Napište zobr. kolmé projekce do roviny kolmé na vektor $(1,1,1)$.

$x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. f ... kolmá projekce do roviny

g .. kolmá projekce do $(1,1,1)$



g má tvar $(x_1,x_2,x_3)\mapsto a(1,1,1)$.

$(x_1,x_2,x_3)-a(1,1,1)\perp(1,1,1)$

Tedy $\langle (x_1,x_2,x_3)-a(1,1,1),(1,1,1)\rangle=0$

$$(x_1+x_2+x_3)-a(1+1+1)=0$$

$$a=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$g:(x_1,x_2,x_3)\mapsto\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$$

$f=id_{\mathbb{R}^3}-g$

$$(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)-\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ ,\ \right)=$$

$$=\left(\frac{-2x_1+x_2+x_3}{3},\frac{x_1-2x_2+x_3}{3},\frac{x_1+x_2-2x_3}{3}\right)\quad A=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Projekce f má matici A.

Př: G.-S. ort. procesem najděte ortonormální bázi podprostoru $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1+2x_2+x_3=0\}$

① Najděme libovolnou bázi V.

V je kolmý na $(1,2,3,0)$. Zvolíme vektory

$u_1=(0,0,0,1)$, $u_2=(-2,1,0,1)$, $u_3=(-3,0,1,0)$

(u_1,u_2,u_3) tvoří bázi V.

② Najdeme ortogonální bázi v_1,v_2,v_3

- $v_1=u_1=(0,0,0,1)$
- $v_2=u_2+a v_1 \quad / \langle\ ,v_1\rangle$

$0=\langle u_2,v_1\rangle + a\langle v_1,v_1\rangle$

$0= \quad 1+a\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{a=-1}$

$\Rightarrow v_2=u_2-v_1$

- $v_3=u_3+a v_1+b v_2 \quad / \langle\ ,v_1\rangle \quad \langle\ ,v_2\rangle$

$0=\langle u_3,v_1\rangle + a\langle v_1,v_1\rangle$

$0= \quad 0 \quad +a\cdot 1 \quad \Rightarrow a=0$

$0=\langle u_3,v_2\rangle + b\langle v_2,v_2\rangle$

$0= \quad 6+b\cdot 5 \quad \Rightarrow b=-\frac{6}{5}$

$v_3=u_3-\frac{6}{5}v_2=\left(-3+\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0\right)$

$\|v_3\|=\frac{1}{5}\sqrt{9+36+25}=\frac{1}{5}\sqrt{70}$

ortogonální báze

$$\boxed{\begin{aligned} v_1&=(0,0,0,1)\\ v_2&=(-2,1,0,0)\\ v_3&=\tfrac{1}{5}(-3,-6,5,0)\end{aligned}}$$

ortonormální báze

$$\boxed{\begin{aligned} w_1&=(0,0,0,1)\\ w_2&=\tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0)\\ w_3&=\tfrac{\sqrt{70}}{5}(-3,-6,5,0)\end{aligned}}$$

$$\underbrace{\langle f(u+v), f(u+v)\rangle}_{\langle u+v,\, u+v\rangle} = \underbrace{\langle f(u), f(u)\rangle}_{\langle u,u\rangle} + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \underbrace{\langle f(v), f(v)\rangle}_{\langle v,v\rangle}$$

$$\langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle + \langle v,v\rangle$$

Tedy $\langle u,v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$

- Skalární součin $\langle u,v\rangle$ má v ortonormální bázi α tvar $\langle u,v\rangle = (x_1,\dots,x_n)\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = x^T\cdot y$

u má souřadnice $x_1,\dots,x_n$ v bázi α

v — " — $y_1,\dots,y_n$

- Je-li A matice ortogonálního zobr. $f: V\to V$, pak $f(u) = A\cdot x$, $f(v) = A\cdot y$

$$\langle f(u), f(v)\rangle = (A\cdot x)^T\cdot(A\cdot y) = x^T(A^TA)\,y = x^Ty = \langle u,v\rangle$$

podmínka ortogonality f

Tedy A^TA je jednotková. $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$

$\cdot \ f(W) \subseteq W \quad , \quad W \subseteq V$

$\alpha = (\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\text{báze } W}, u_{k+1}, \dots, u_n)$ je báze V

Zobr. f má v bázi α matici $A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline E & D \end{array}\right) \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \end{array}$

$v \in W$ pok v má souřadnice

$(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, tedy

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}k \\ \\ \}0 \end{array} \quad \Rightarrow D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

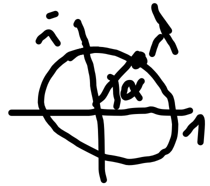
$$\begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \\ D\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\forall x_1, \dots, x_k = 0$

Tedy $D = 0$

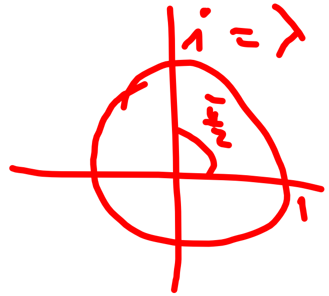
Vlastní čísla λ ortogonálního zobr. $f: V \to V$ mají vlastní hodnotu $|\lambda| = 1$.

- Jestliže $\lambda \in \mathbb{R}$, pak $\lambda = \pm 1$
- Jestliže $\lambda \notin \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, pak



$$\lambda = \underbrace{|\lambda|}_{=1}(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{goniometrický tvar}$$

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo, pak
$\lambda \neq \pm 1$ také $\bar{\lambda} = \cos\alpha - i\sin\alpha$



Celkem dostaneme tvar

$$A = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & +1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & \\ & & & & & & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & \\ & 0 & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ & & & & & & & & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix}$$