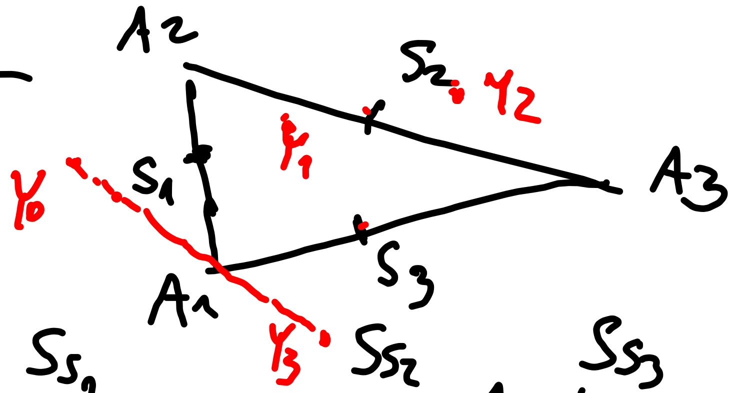
Př 1



S_B je středová souměrnost se středem v B

$$A_1 \xmapsto{S_{S_1}} A_2 \xmapsto{S_{S_2}} A_3 \xmapsto{S_{S_3}} A_1$$

Obecně: $A_1 \xmapsto{S_{S_1}} A_2 \xmapsto{S_{S_2}} \cdots\cdots A_{2n-1} \xmapsto{S_{S_{2n-1}}} A_1$

$S_1, S_2, \dots, S_{2n-1}$ jsou středy stran

Složení $S_{S_{2n-1}} \circ \dots \circ S_{S_2} \circ S_{S_1} = S_X$

Víme, že $S_X(A_1) = A_1$, tedy $X = A_1$.

Máme $Y_0 \xmapsto{S_{A_1}} Y_3$. Tedy A_1 je střed úsečky Y_0Y_3. Ostatní vrcholy $A_2, \dots, A_n$ najdeme aplikací $S_{S_1}, S_{S_2}, \dots, S_{S_n}$.

Nechť M je množina. Pak libovolná podmnožina $R \subseteq M \times M$ se nazývá __relace__. Píšeme $a \sim_R b$, jestliže $(a,b) \in R$.

Relace R se nazývá

__reflexivní__, jestliže $(a,a) \in R$ $\forall a \in M$. Tj.

$$a \sim_R a \quad \forall a \in M$$

__symetrická__, jestliže pro každá $(a,b) \in R$, pak také $(b,a) \in R$.

__tranzitivní__, jestliže platí: máme-li $(a,b) \in R$, $(b,c) \in R$, pak také $(a,c) \in R$.

Tj. $a \sim_R b$ a $b \sim_R c$ znamená, že $a \sim_R c$.

R se nazývá relace __ekvivalence__, jestliže R je zároveň reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Př 2 Rozhodněte, zda je následující relace na M relace ekvivalence.

(1) $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $(f \sim g) \iff f(0) = g(0)$

reflexivita: $f \sim f$, $f(0) = f(0)$) ANO

symetrie: $f \sim g \overset{?}{\Longrightarrow} g \sim f$ ANO

$f(0) = g(0)$ $\qquad$ $g(0) = f(0)$

tranzitivita: předp., že $f \sim g$ a $g \sim h$; tedy

$f(0) = g(0)$, $g(0) = h(0)$ $\Rightarrow f(0) = h(0)$, tj. $f \sim h$

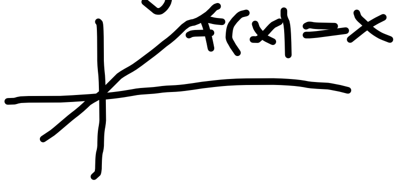
ANO

Tedy $\sim$ je relace ekvivalence.

(2) $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $(f \sim g) \iff f(0) = g(1)$

Otázka: je $\sim$ reflexivní, tj. platí $f \sim f$ $\forall f \in M$?

NE



$f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$. Tedy $\sim$ není relace ekvivalence

(3) M je množina všech přímek v rovině, dvě přímky jsou v relaci, jestliže se neprotínají.

Je tato relace reflexivní? NE

$p \not\sim p$ pro každou přímku p

(4) M je opět množina všech přímek v rovině, dvě přímky jsou v relaci, jestliže jsou rovnoběžné.

$p \sim q \Leftrightarrow p \parallel q$, p, q jsou přímky.

Reflexivita: $p \sim p \Leftrightarrow p \parallel p$ ANO

Symetrie: $p \sim q$ znamená $p \parallel q$, tj. $q \sim p$ ANO

Tranzitivita: $p \sim q$, $q \sim r$, pak $p \sim r$ ANO

$p \parallel q$ $\quad$ $q \parallel r$ $\Rightarrow p \parallel r$

Tedy $\sim$ je relace ekvivalence.

(5) $M = \mathbb{N}$. $(m \sim n) \Leftrightarrow S(m) + S(n) = 20$,

kde $S(m)$ je ciferný součet čísla m.

Reflexivita: $m \sim m$, tj. $S(m) + S(m) = 20$

$\forall m \in \mathbb{N}$, $m = 1$: $\underbrace{S(1)}_{1} + S(1) = 2 \neq 20$

$\Rightarrow$ není reflexivní

$\Rightarrow$ není relace ekvivalence.

③ Injektivní zobrazení $\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$

Každé injektivní zobrazení odpovídá uspořádané trojici (a,b,c) z mn. $\{1,2,3,4\}$

$1 \mapsto a \qquad a,b,c \in \{1,2,3,4\}$

$2 \mapsto b$

$3 \mapsto c$

Těchto usp. množin je $V(4,3) = 4\cdot 3\cdot 2 =$
$= 24$

④ Surjektivní zobrazení $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$

- Všech zobrazení $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ je $V(4,3) = 3^4$.
- Počet zobrazení, která nejsou surjektivní:

Obraz má je

jednoprvkový: 3 možnosti

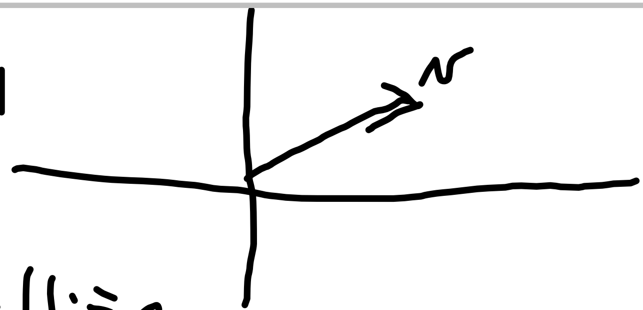
dvouprvkový: máme $\binom{3}{2}$ dvouprvkových podmnožin v $\{1,2,3\}$

Pro každou tuto volbu máme $2^4 - 2$, jelikož dvě zobrazení $\{1,2,3,4\} \to \{a,b\}$ se zobrazí na jeden prvek

Závěr:
$$\boxed{3^4 - \left[3 + \binom{3}{2}\cdot(2^4-2)\right]}$$

5) $M = \mathbb{R}^2$,

$u, \bar{u} \in \mathbb{R}^2$



$u \sim \bar{u}$, jestliže

$u - \bar{u} = k \cdot v$, $k \in \mathbb{R}$

Reflexivita: $u - u = 0 \cdot v$, tedy $u \sim u$ ANO

Symetrie: $u \sim \bar{u}$, potom $\bar{u} \sim u$ ANO

$u - \bar{u} = k \cdot v$

$\bar{u} - u = (-k) \cdot v$

Tranzitivita: $u \sim \bar{u}$, $\bar{u} \sim \bar{\bar{u}} \Rightarrow u \sim \bar{\bar{u}}$ ANO

$u - \bar{u} = k \cdot v$, $\bar{u} - \bar{\bar{u}} = l \cdot v$, $k, l \in \mathbb{R}$

Součtem dostaneme $u - \bar{\bar{u}} = \underbrace{(k+l)}_{\in \mathbb{R}} \cdot v$

Tedy $\sim$ je relace ekvivalence.

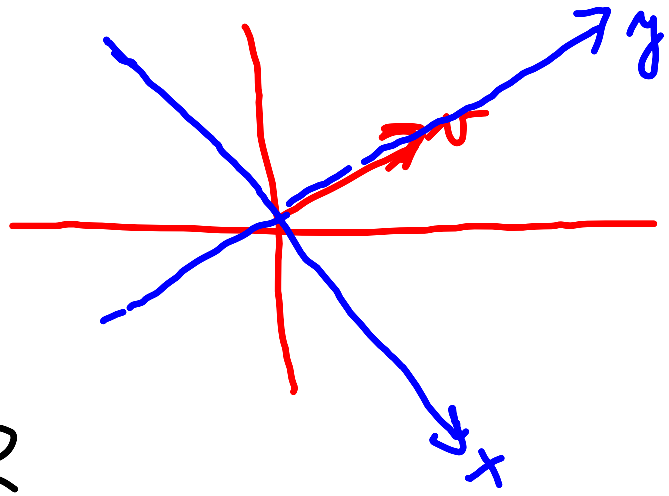
Def: R je relace ekvivalence na M, pak třída $[a]$ je definována jako $[a] = \{b \in M \mid (a,b) \in R\}$

$a \in M$

$a \sim b$, pak $[a] = [b]$

Př 5 pokračování

Zvolíme osy x, y jako na obrázku.



$u = (a, b)$ $\qquad v = (0, r)$

$\bar{u} = (\bar{a}, b)$ $\qquad r \in \mathbb{R}$

$u \sim \bar{u} \iff u - \bar{u} = k \cdot v$

$u \sim \bar{u} \iff a = \bar{a}$

Třída vektoru $u = (a, b)$ je
$[u] = \{ (a, c) \mid c \in \mathbb{R} \}$. Tedy

Třídy relace $\sim$ odpovídají vektorům na ose x.

Nechť $\sim$ je relace ekvivalence na množině M. Pak třídy $[a]$, $a \in M$, tvoří rozklad množiny M. To znamená,

$$M = [a_1] \cup [a_2] \cup \ldots \cup [a_p]$$

disjunktní sjednocení, tj.

$$[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$$

$a_1 \sim b$, pak $a_1, b \in [a_1] = [b]$

Příklad 6 Určete počet relací ekvivalence na $\{1,2,3,4\}$.

Uvažme rozklad $\{1,2,3,4\}$ na třídy ekvivalence.

Počty prvků ve třídách rozkladu

1, 1, 1, 1	(4 třídy)	1 možnost
2, 1, 1	(3 třídy)	
2, 2	(2 třídy)	[redacted]
3, 1	(2 třídy)	
4	(1 třída)	