Podmíněná pravděpodobnost

5.1. Motivace: Opakovaně nezávisle provádíme týž náhodný pokus a sledujeme nastoupení jevu A v těch pokusech, v nichž nastoupil jev H. Podmíněnou relativní četnost A za podmínky H jsme v popisné statistice zavedli vztahem $p(A/H) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)}$. Tato podmíněná relativní četnost se s rostoucím počtem pokusů ustaluje kolem konstanty P(A/H), kterou považujeme za podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky H.

5.2. Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $H \in \mathcal{A}$. jev s nenulovou pravděpodobností. Podmíněnou pravděpodobností za podmínky H rozumíme funkci
$P(./H): \mathcal{A} \to R$ danou vzorcem: $\forall A \in \mathcal{A}$: $\boxed{P(A/H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.}$

Podmíněná pravděpodobnost

5.3. Věta: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice a kromě toho pro ni platí:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)$ pro $P(A_1) \neq 0$.
b) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)\, P(A_1/A_2)$ pro $P(A_2) \neq 0$.
c) Jevy A_1, A_2 jsou stochasticky nezávislé, právě když $P(A_1/A_2) = P(A_1)$ nebo $P(A_2) = 0$ a právě když $P(A_2/A_1) = P(A_2)$ nebo $P(A_1) = 0$.

Důkaz:

Stačí ověřit platnost axiómů P2, P10, P15.

ad a), ad b) Plyne přímo z definičního vzorce.

ad c) Nechť A_1, A_2 jsou stochasticky nezávislé $\Rightarrow P(A_1/A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_2)} = P(A_1)$.

Nechť naopak $P(A_1/A_2) = P(A_1)$. Z definice: $P(A_1/A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = P(A_1) \Rightarrow P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, tedy A_1, A_2 jsou stochasticky nezávislé.

Příklad

5.4. Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padlo sudé číslo, je-li známo, že padlo číslo menší než 5?

Řešení: $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, A … padlo sudé číslo, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, H … padlo číslo menší než 5, $H = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A \cap H = \{\omega_2, \omega_4\}$

$$P(A/H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}$$

Příklad: Dvakrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet přesáhne 10, víme-li, že padla (aspoň jedna) šestka?

Řešení:

$$P(A \mid H) = \frac{\frac{|\{[6,5],[5,6],[6,6]\}|}{6 \cdot 6}}{\frac{2 \cdot 5 + 1}{6 \cdot 6}} = \frac{3}{11}$$

Věta o násobení pravděpodobností

5.5. Věta: (Věta o násobení pravděpodobností)
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takové jevy, že $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Pak $\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})}$.
Důkaz: Matematickou indukcí. Předpokládáme, že vztah platí pro libovolné přirozené $n \geq 2$ a dokážeme jeho platnost pro n+1:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) P\left(A_{n+1} / \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) P(A_2/A_1) \ldots P(A_{n+1}/A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

5.6. Příklad: Ze skupiny 100 výrobků, která obsahuje 10 zmetků, vybereme náhodně bez vracení 3 výrobky. Vypočtěte pravděpodobnost jevu, že první dva výrobky budou kvalitní a třetí bude zmetek.
Řešení:
Jev A_i znamená, že i-tý vybraný výrobek je kvalitní, i = 1, 2, 3.
Počítáme $P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(\overline{A_3}/A_1 \cap A_2) = \frac{90}{100}\frac{89}{99}\frac{10}{98} = 0{,}083$.

Věta o úplné pravděpodobnosti, Bayesův vzorec

5.7. Věta (vzorec pro výpočet úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec)
Nechť $(\Omega,\mathcal{A},P)$ je pravděpodobnostní prostor, $H_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$ (I je nejvýše spočetná indexová množina) takové jevy, že $P(H_i) > 0$, $\bigcup_{i\in I} H_i = \Omega$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ (říkáme, že jevy H_i, $i \in I$ tvoří úplný systém hypotéz).

a) Pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$ platí vzorec úplné pravděpodobnosti: $\boxed{P(A) = \sum_{i\in I} P(H_i)P(A/H_i)}$

b) Pro libovolnou hypotézu H_k, $k \in I$ a jev $A \in \mathcal{A}$ s nenulovou pravděpodobností platí Bayesův vzorec: $\boxed{P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}}$.

($P(H_k/A)$ se nazývá aposteriorní pravděpodobnost hypotézy H_k, $P(H_k)$ je apriorní pravděpodobnost.)

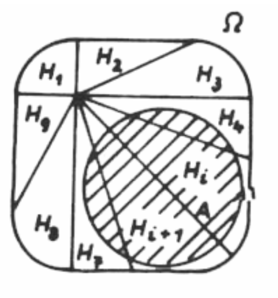
Důkaz:

ad a) Jev A vyjádříme jako sjednocení neslučitelných jevů: $A = \bigcup_{i\in I}(A \cap H_i)$.

Pak $P(A) = P\left(\bigcup_{i\in I}(A\cap H_i)\right) = \sum_{i\in I} P(A\cap H_i) = \sum_{i\in I} P(H_i)P(A/H_i)$

ad b) $P(H_k/A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}$

Ilustrace vzorce pro úplnou pravděpodobnost



Příklad

1) Bez vracení taháme z urny s a černými a b bílými koulemi. Jaká je pravděpodobnost, že ve druhém tahu vytáhneme černou kouli, jestliže v prvním tahu jsme vytáhli kouli bílou?

Řešení:

$$P(A\,|\,H) = \frac{\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{a}{a+b-1}}{\dfrac{b}{a+b}\cdot\dfrac{a+b-1}{a+b-1}} = \frac{a}{a+b-1}$$

2) V dostihu zvítězí kůň A (B) s pravděpodobností 0,5 (0,3). Kůň A ztratil na startu příliš a je jisté, že nezvítězí. Jaká je nyní pravděpodobnost, že zvítězí B?

Řešení:

$$P(A\,|\,\overline{H}) = \frac{P(A\cap\overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{P(A)}{1-P(H)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

Příklad

V první urně je 6 bílých a 2 černé koule, ve druhé jsou 4 bílé a 2 černé koule. Náhodně zvolíme urnu a vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

Řešení:

Pravděpodobnost tahu z první (resp. druhé) urny, je 1/2. Označíme-li B =[tah bílé koule], U_i = [tah z urny i], je podle věty o celkové pravděpodobnosti

$$P(B) = P(B\,|\,U_1)\cdot P(U_1) + P(B\,|\,U_2)\cdot P(U_2) = \frac{6}{6+2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{4+2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{17}{24} = 0{,}708$$

Příklad

Automat X vyrobí za směnu dvakrát více výrobku než automat Y. Pravděpodobnost vzniku zmetku je u automatu X 0,02, u Y 0,05. Po skončení směny se výrobky ukládají do jedné bedny. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek náhodně vybraný z této bedny není zmetek?

Řešení:

Podle věty o celkové pravděpodobnosti (poměr výrobků v bedně je 2 : 1 ve prospěch automatu X, tj. 2/3 výrobků pochází od X a 1/3 od Y)

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}98 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 = \frac{2{,}91}{3} = 0{,}97$$

Příklad

Mezi 20 střelci jsou 4 výborní, 10 dobrých a 6 průměrných s pravděpodobnostmi zásahu 0,9, 0,7 a 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že dva náhodně vybraní střelci oba zasáhnou cíl?

Řešení:

Podle toho, která dvojice bude vybrána

$$P(A) = (0{,}9 \cdot 0{,}9) \cdot \frac{4 \cdot 3}{20 \cdot 19} + (0{,}9 \cdot 0{,}7) \cdot \frac{4 \cdot 10}{20 \cdot 19} + \ldots + (0{,}5 \cdot 0{,}5) \cdot \frac{10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = 0{,}46$$

Věta o úplné pravděpodobnosti, Bayesův vzorec

Thomas Bayes (1702 – 1761): Presbytariánský duchovní

5.8. Poznámka (Návod na použití vzorce pro výpočet úplné pravděpodobnosti a Bayesova vzorce)
Nejprve podle textu úlohy stanovíme úplný systém hypotéz, tj,. jevy, které se navzájem vylučují a přitom vyčerpávají všechny možnosti.
V úlohách vedoucích na vzorec pro výpočet úplné pravděpodobnosti se zajímáme o pravděpodobnost jevu, který s hypotézami nesouvisí, zatímco v úlohách vedoucích na Bayesův vzorec nás zajímá pravděpodobnost některé hypotézy za podmínky, že nastal jev, který s hypotézami nesouvisí.

Příklad

5.9. Příklad: Test obsahuje 100 otázek. Zkoušený si nejprve vylosuje otázku a pak si jeho postup zjednodušeně představíme takto: zná.li správnou odpověď, zatrhne ji. Nezná-li správnou odpověď, zvolí se stejnou pravděpodobností kteroukoliv ze čtyř možných odpovědí. Předpokládejme, že ve skutečnosti zná zkoušený právě k správných odpovědí.

a) S jakou pravděpodobností správně odpoví?

b) S jakou pravděpodobností je při správné odpovědi pravdivé tvrzení, že zkoušený ve skutečnosti jenom hádal?

Řešení: H_1 … zkoušený zná správnou odpověď, H_2 … zkoušený nezná správnou odpověď, A … zkoušený správně odpoví

$$P(H_1)=\frac{k}{100}, P(H_{21})=\frac{100-k}{100}, P(A/H_1)=1, P(A/H_2)=\frac{1}{4}$$

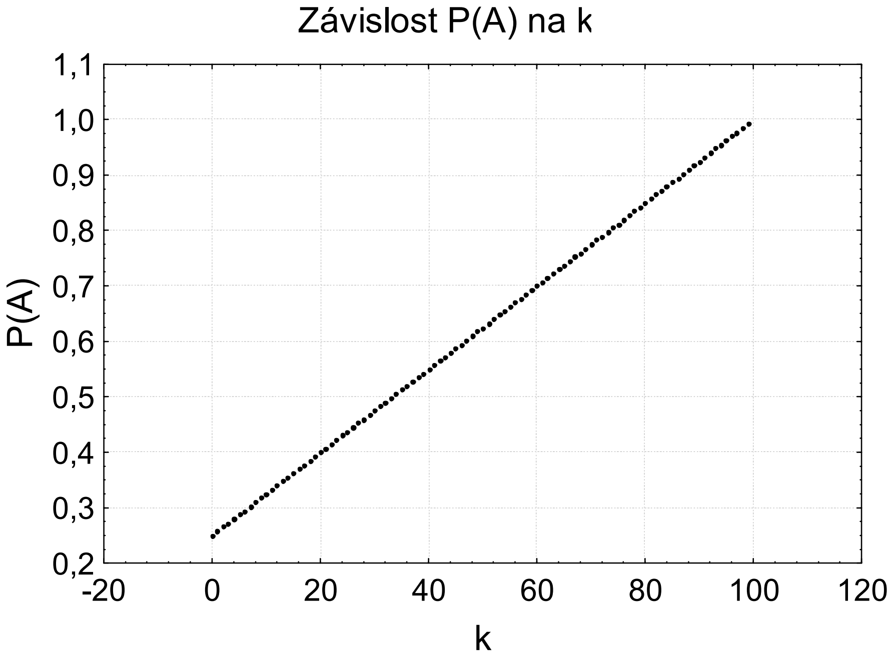
ad a) $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{k}{100}\cdot 1+\frac{100-k}{100}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3k+100}{400}$

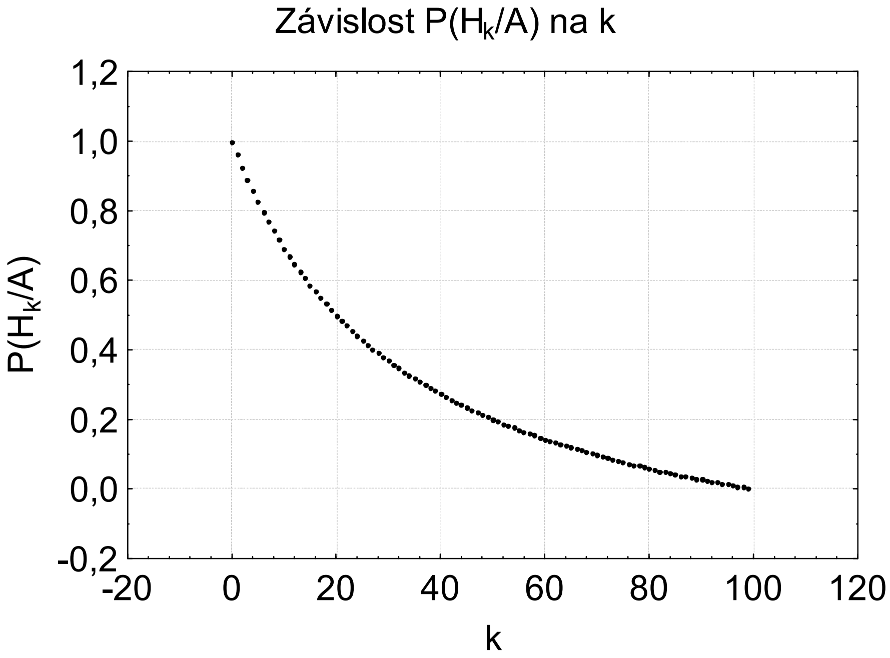
ad b) $P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{100-k}{100}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3k+100}{400}}=\frac{100-k}{3k+100}$

k	0	10	50	90
P(A)	0,25	0,325	0,625	0,925
$P(H_2/A)$	1	0,692	0,2	0,027

Příklad

$$P(A) = \frac{3k + 100}{400} \qquad P(H_2 / A) = \frac{100 - k}{3k + 100}$$





Příklad

5.10. Příklad: K osevu byly vybrány dvě odrůdy pšenice, a to 20% první odrůdy a 80% druhé odrůdy. Pravděpodobnost, že ze zrna vyroste klas, je pro první odrůdu 0,95 a pro druhou odrůdu 0,98. Jaká je pravděpodobnost, že

a) z náhodně vybraného zrna vyroste klas?
b) náhodně vybrané zrno, z něhož vyrostl klas, pocházelo z první odrůdy pšenice?
c) náhodně vybrané zrno, z něhož vyrostl klas, pocházelo z druhé odrůdy pšenice?
d) náhodně vybrané zrno, z něhož nevyrostl klas, pocházelo z první odrůdy pšenice?
e) náhodně vybrané zrno, z něhož nevyrostl klas, pocházelo z druhé odrůdy pšenice?

Řešení:

Jev A … z náhodně vybraného zrna vyroste klas
Jev H_1 … zrno pochází z první odrůdy pšenice
Jev H_2 … zrno pochází z druhé odrůdy pšenice

$P(H_1) = 0{,}2,\ P(A|H_1) = 0{,}95,\ P(H_2) = 0{,}8,\ P(A|H_2) = 0{,}98$

ad a) $P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}95 + 0{,}8 \cdot 0{,}98 = 0{,}19 + 0{,}784 = 0{,}974$

ad b) $P(H_1/A) = \dfrac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}95}{0{,}974} = 0{,}1951$

ad c) $P(H_2/A) = \dfrac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}98}{0{,}974} = 0{,}8049$

ad d) $P(H_1/\overline{A}) = \dfrac{P(H_1)P(\overline{A}/H_1)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{1 - 0{,}974} = \dfrac{0{,}01}{0{,}026} = 0{,}3846$

ad e) $P(H_2/\overline{A}) = \dfrac{P(H_2)P(\overline{A}/H_2)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0{,}8 \cdot 0{,}02}{1 - 0{,}974} = \dfrac{0{,}016}{0{,}026} = 0{,}6154$

Příklad

1) Jeden ze 3 střelců s pravděpodobnostmi zásahu 0,3, 0,5, 0,8 vystřelil a zasáhl. Jaká je pravděpodobnost, že střílel druhý střelec?

Řešení:

$$P(A) = \frac{0{,}5 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}3 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}5 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}8 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

2) Mezi 20 střelci je 5 výborných, 9 dobrých a 6 průměrných s pravděpodobnostmi zásahu 0,9, 0,8 a 0,7. Náhodně vybraný střelec ze 2 ran trefil jednou. Jaká je pravděpodobnost, že šlo o výborného (dobrého, průměrného) střelce?

Řešení:

$$P(\text{byl to výborný}) = \frac{2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{5}{20}}{2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{5}{20} + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{9}{20} + 2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot \frac{6}{20}} = 0{,}143$$

$$P(\text{byl to dobrý}) = 0{,}457$$

$$P(\text{byl to průměrný}) = 0{,}4$$

Příklad

Víme-li, že pravděpodobnost odhalení AIDS při testu je 0,999, že pravděpodobnost správného otestování zdravého jedince je 0,99 a že AIDS se vyskytuje u 0,006 lidí, jaká je pravděpodobnost, že člověk, u kterého byl test pozitivní, AIDS skutečně má?

Řešení:

Označíme-li A = [má AIDS], T = [test říká AIDS], známe P(T |A) = 0, 999, $P(\overline{T} \mid \overline{A}) = 0{,}99$, P(A) = 0, 006. Bayesova věta nám dá

$$P(A \mid T) = \frac{P(T \mid A)P(A)}{P(T \mid A)P(A) + P(T \mid \overline{A})P(\overline{A})}$$

$$= \frac{0{,}999 \cdot 0{,}006}{0{,}999 \cdot 0{,}006 + (1 - 0{,}99) \cdot (1 - 0{,}006)} = 0{,}376$$

Geometrická pravděpodobnost

6.1. Motivace: V některých situacích je vhodné zvolit za základní prostor nikoliv obecnou množinu Ω, ale n-rozměrný prostor $\mathbf{R}^n$ a za možné výsledky reálné vektory $(x_1,\ldots,x_n)$. Za jevové pole však nevezmeme systém všech podmnožin prostoru $\mathbf{R}^n$ (ten totiž obsahuje i tzv. neměřitelné množiny), ale méně podrobné borelovské pole $\mathcal{B}^n$.

Émile Borel (1871 – 1956) – francouzský matematik politik, zabýval s teorií míry, teorií pravděpodobnosti a teorií her. Byl poslancem francouzského parlamentu a ministrem námořnictva.

Na borelovském poli pak speciálním způsobem zavedeme geometrickou pravděpodobnost a dostaneme pravděpodobnostní prostor $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n, Q)$.

Borelovské pole, Borelovské množiny

6.2. Definice

Nechť n je přirozené číslo. Množinu $R^n = (-\infty,\infty) \times \ldots \times (-\infty,\infty) = (-\infty,\infty)^n$ nazýváme **n-rozměrným prostorem**. Minimální jevové pole na R^n obsahující třídu všech polouzavřených intervalů typu $(-\infty, x_1\rangle \times \ldots \times (-\infty, x_n\rangle$ pro $(x_1, \ldots x_n) \in R^n$ nazýváme **n-rozměrným borelovským polem $\mathcal{B}^n$** a prvky tohoto pole nazýváme **(n-rozměrnými) borelovskými množinami.** Dvojice $(R^n, \mathcal{B}^n)$ je tedy měřitelný prostor.

(Není podstatné, že borelovské pole je generováno právě intervaly typu $(-\infty, x_1\rangle \times \ldots \times (-\infty, x_n\rangle$. Mohlo by být generováno i jinými typy intervalů.)

6.3. Věta: Borelovské pole je jevové pole, tzn., že splňuje axiómy J2, J6, J8.

6.4. Věta: Mezi borelovské množiny náleží zejména prázdná množina, celý základní prostor, všechny jednobodové, konečné a spočetné množiny, intervaly všech typů, všechny uzavřené a otevřené oblasti a všechna konečná a spočetná sjednocení a průniky těchto množin. Rovněž kartézský součin borelovských množin je borelovská množina, ovšem vyšší dimenze.

Borelovsky měřitelná zobrazení, Borelovské funkce

6.5. Definice

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}), (R^n, \mathcal{B}^n)$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $\mathbf{X} : \Omega \mapsto R^n$ se nazývá **borelovsky měřitelné** (vzhledem k $\mathcal{A}$), právě když úplný vzor každé n-rozměrné borelovské množiny je jev, tj.

$\forall B \in \mathcal{B}^n : \mathbf{X}^{inv}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$.

Ve speciálním případě, kdy $\Omega = R^m$ a $\mathcal{A} = \mathcal{B}^m, \mathbf{X} = \mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$, tj.

$\forall B \in \mathcal{B}^n : \mathbf{g}^{inv}(B) =$

$\{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m; (g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m)) \in B\} \in \mathcal{B}^m$, hovoříme o **borelovské funkci**.

6.6. Věta: Mezi borelovské funkce náleží zejména všechny spojité a po částech spojité funkce. Rovněž limita všude konvergentní posloupnosti borelovských funkcí je borelovská funkce.

6.7. Definice:

Nechť $(R^n, \mathcal{B}^n)$ je měřitelný prostor a $G \in \mathcal{B}^n$ je borelovská množina. **Objemem** borelovské množiny G rozumíme číslo

$mes(G) = \int\limits_G \ldots \int dx_1 \ldots dx_n$, pokud Riemannův integrál vpravo existuje.

Geometrická pravděpodobnost

6.8. Definice:

Nechť objem $mes(G)$ borelovské množiny G je nenulový a konečný. **Geometrickou pravděpodobností** soustředěnou na množině G rozumíme funkci $Q : \mathcal{B}^n \mapsto R$ danou vzorcem

$$\forall B \in \mathcal{B}^n, B \subseteq G : \boxed{Q(B) = \frac{mes(B)}{mes(G)}}, \text{ pokud } mes(B) \text{ existuje.}$$

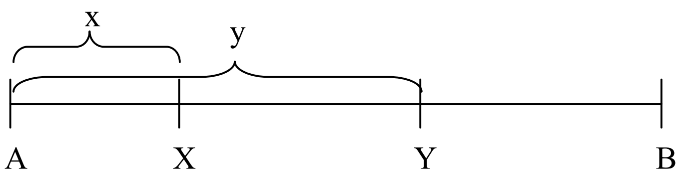
6.9. Věta: Geometrická pravděpodobnost je pravděpodobnost ve smyslu axiomatické definice, tj. splňuje axiómy P2, P10, P15. Trojice ($\mathbf{R}^n$, $\mathcal{B}^n$, Q) je tedy pravděpodobnostní prostor.

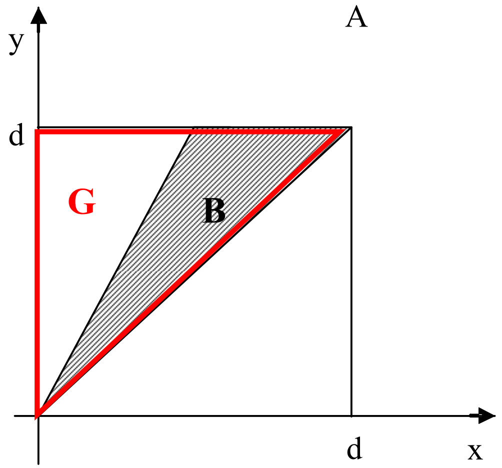
Příklad

6.10. Příklad: Na úsečce AB délky d jsou náhodně zvoleny body X a Y, přičemž vzdálenost bodu X od bodu A je menší než vzdálenost bodu Y od bodu A. Jaká je pravděpodobnost, že délka úsečky AX je větší než délka úsečky XY?

Řešení:

$G = \{(x, y) \in R^2; 0 \le x \le d, 0 \le y \le d, x \le y\}$ $B = \{(x, y) \in G; x > y - x\}$





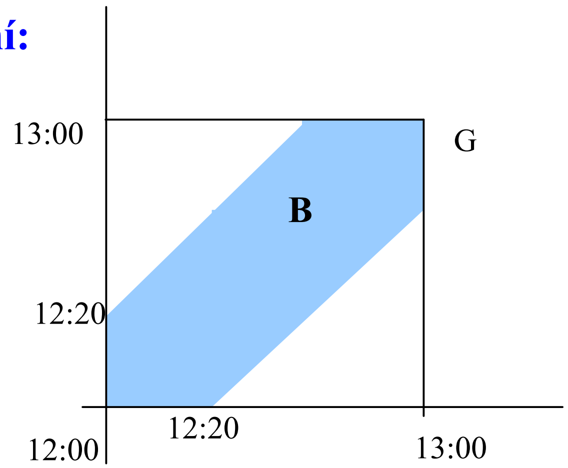
$$mes(G) = \frac{d^2}{2}, mes(B) = \frac{d^2}{2} - \frac{\frac{d}{2} \cdot d}{2} = \frac{d^2}{4}, Q(B) = \frac{mes(B)}{mes(G)} = \frac{1}{2}$$

Délka úsečky AX je větší než délka úsečky XY s pravděpodobností 0,5.

Příklad

Dívka a chlapec si smluvili schůzku mezi 12:00 a 13:00. Přijdou náhodně v tomto rozmezí a čekají na sebe 20 minut, nejdéle však do 13:00. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?

Řešení:



$$mes(G) = 1$$

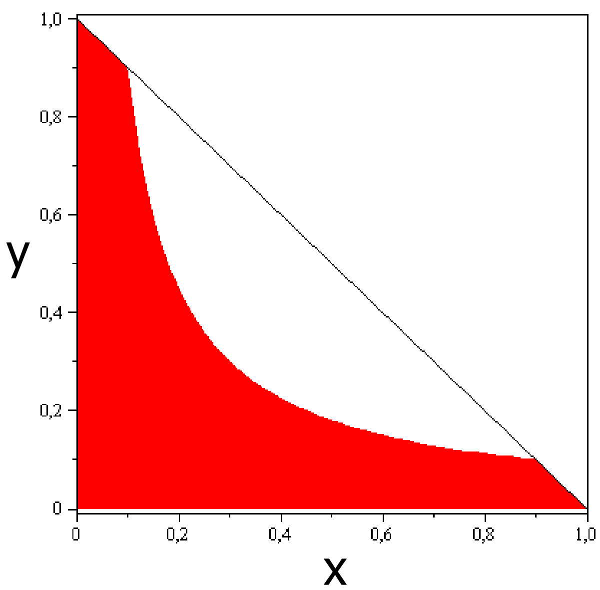
$$mes(B) = \frac{5}{9}$$

$$Q(B) = \frac{5}{9}$$

Příklad

Volíme náhodně dvě čísla z intervalu (0,1). Jaká je pravděpodobnost, že jejich součet je menší než jedna a současně jejich součin menší než 0,09?

Řešení



$$1 - x = \frac{0{,}09}{x}$$

$$x^2 - x + 0{,}09 = 0$$

$$x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}9$$

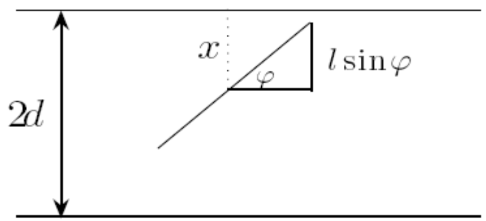
$$Q(B) = \frac{1}{2} - \int_{0,1}^{0,9} \left(1 - x - \frac{0{,}09}{x}\right) dx = 0{,}29775$$

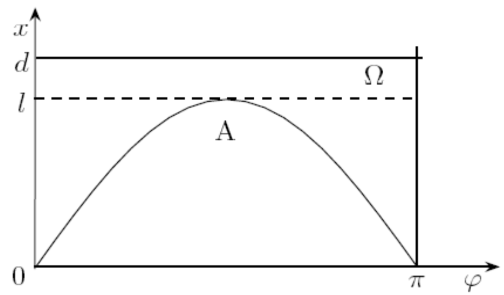
Příklad

Buffonova úloha. V rovině jsou rozmístěny rovnoběžky ve vzdálenosti d > 0. Na rovinu hodíme náhodně jehlu délky 0 < l < d. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku?

Řešení

Předpokládejme, že náhodně znamená, že každá poloha (středu) a každá orientace jehly je stejně pravděpodobná a že tyto dvě nahodile proměnné jsou na sobě nezávislé. Nechť *x* je vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a φ je úhel, který jehla svírá s rovnoběžkami.





$$\Omega = \{0 \le \varphi < \pi, 0 \le x \le d\}$$

$$\mathrm{A} = \{(\varphi, x) \in \Omega : x \le l \sin\varphi\}$$

$$Q(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = \frac{\int_0^\pi l \sin\varphi \, d\varphi}{\pi d} = \frac{2l}{\pi d}$$