Náhodná veličina

7.1. Motivace: Výsledky náhodného pokusu lze popsat reálnými čísly (resp. reálnými vektory) pomocí nějakého zobrazení $X : \Omega \to R$ ($\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbf{R}^n$). Pokud bude toto zobrazení splňovat určité podmínky, nazveme ho náhodnou veličinou.
Příklady náhodných veličin: počet členů náhodně vybrané domácnosti, počet chyb, jichž se dopustí nějaké zařízení za určitou dobu, doba do poruchy nějakého zařízení, hmotnost náhodně vybraného výrobku apod.

Vztah mezi znakem a náhodnou veličinou

Pojem „znak“, který jsme zavedli v popisné statistice, je sice blízký pojmu „náhodná veličina“, ale není s ním totožný. Znak může být považován za náhodnou veličinu, jestliže jeho hodnoty zjišťujeme na objektech, které byly vybrány ze základního souboru náhodně.

7.2. Definice:

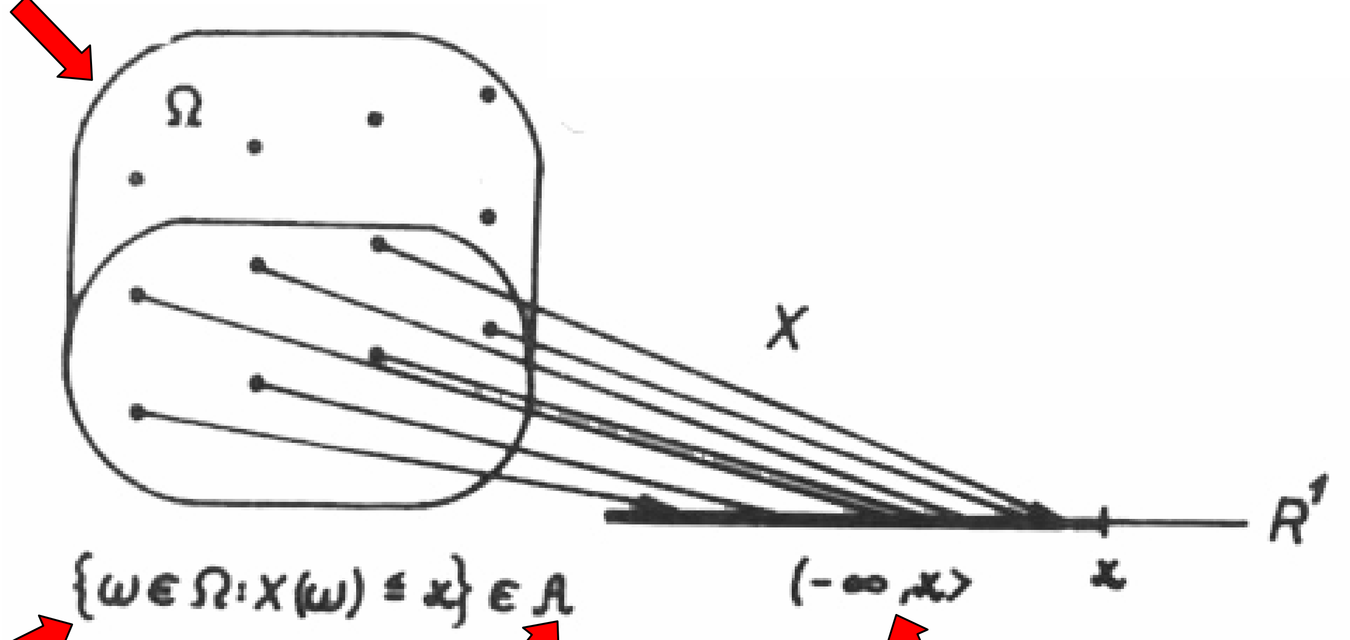
Nechť $(\Omega, \mathcal{A}), (R^n, \mathcal{B}^n)$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $\mathbf{X} : \Omega \mapsto R^n$ se nazývá **náhodná veličina** (vzhledem k $\mathcal{A}$), právě když je borelovsky měřitelné (vzhledem k $\mathcal{A}$). Pro $n = 1$ hovoříme o **skalární náhodné veličině**, pro $n \geq 2$ o **náhodném vektoru**. Přitom zobrazení $X_1 : \Omega \to R, \ldots, X_n : \Omega \mapsto R$ se nazývají **složky náhodného vektoru**. Obraz $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ se nazývá **číselná realizace** náhodné veličiny $\mathbf{X}$ příslušná možnému výsledku ω.

Ilustrace náhodné veličiny

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}), (R^n, \mathcal{B}^n)$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $\mathbf{X} : \Omega \mapsto R^n$ se nazývá **borelovsky měřitelné** (vzhledem k $\mathcal{A}$), právě když úplný vzor každé n-rozměrné borelovské množiny je jev, tj.

$$\forall B \in \mathcal{B}^n : \mathbf{X}^{inv}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Základní prostor



Jev

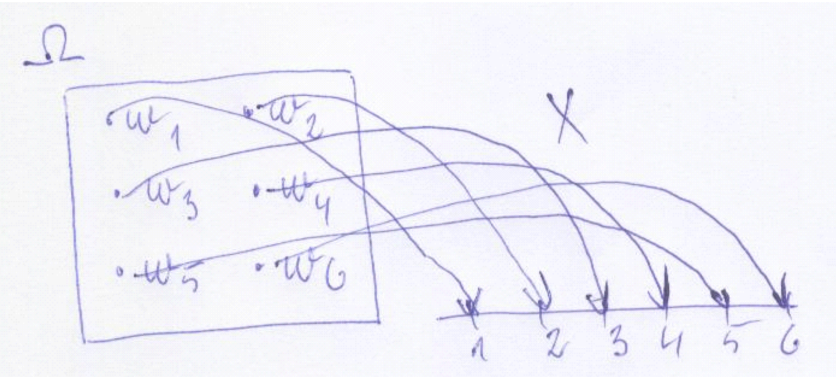
Jevové pole

Borelovská množina

Příklad

7.3. Příklad: Náhodný pokus spočívá v hodu kostkou. Základní prostor $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$. Uvážíme dvě jevová pole, a to $\mathcal{A}_{max} = \{A; A \subseteq \Omega\}$ a $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}\}$. Zjistěte, zda zobrazení $X : \Omega \to R$, které poloze kostky číslem i nahoru přiřazuje číslo i, i = 1, …, 6, je náhodná veličina vzhledem k $\mathcal{A}_{max}$ a vzhledem k $\mathcal{A}$.

Řešení:



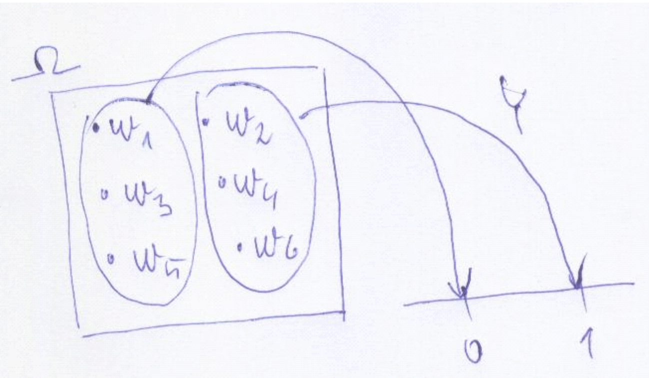
Zobrazení $X : \Omega \to R$ je náhodná veličina vzhledem k $\mathcal{A}_{max}$, protože úplný vzor každé borelovské množiny je jev vzhledem k $\mathcal{A}_{max}$. Vzhledem k vzhledem k $\mathcal{A}$ však X není náhodná veličina:

Úplný vzor množiny $(-\infty, 4\rangle$ je $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \notin \mathcal{A}$.

Příklad

Zavedeme zobrazení $\Omega \rightarrow R$, které poloze kostky lichým číslem nahoru přiřazuje 0 a sudým 1.

A = $\{\Omega, \emptyset, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}\}$



Toto zobrazení je náhodná veličina vzhledem k A a nazývá se ukazatel parity.

Náhodná veličina

7.4. Označení

a) Jestliže nehrozí nebezpečí nedorozumění, zapisujeme náhodnou veličinu i její číselnou realizaci týmž symbolem $\mathbf{X}$.

b) Množinu $\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) \in B\}$ zkráceně zapisujeme $\{\mathbf{X} \in B\}$ a čteme: náhodná veličina $\mathbf{X}$ se realizovala v borelovské množině B. Ve speciálním případě, kdy $B = \{\mathbf{x}\}$ resp. $B = (-\infty, \mathbf{x})$, píšeme $\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\}$ resp. $\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}$.

c) Zápis pravděpodobnosti zkrátíme takto:

$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) \in B\}) = P(\mathbf{X} \in B)$

$P(\{\omega \in \Omega; \mathbf{X}(\omega) \in B\}/\{\omega \in \Omega; \mathbf{Y}(\omega) \in C\}) = P(\mathbf{X} \in B/\mathbf{Y} \in C)$.

Transformovaná náhodná veličina

7.5. Věta:

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}), (R^n, \mathcal{B}^n), (R^m, \mathcal{B}^m)$ jsou měřitelné prostory. Nechť $\mathbf{X} : \Omega \mapsto R^n$ je náhodná veličina a $\mathbf{g} : R^n \mapsto R^m$ je borelovská funkce. Pak složené zobrazení $\mathbf{Y} : \Omega \mapsto R^m$ dané vzorcem $\forall \omega \in \Omega : \mathbf{Y}(\omega) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(\omega))$ je náhodná veličina. Nazývá se **transformovaná náhodná veličina**, pro $m = 1$ skalární, pro $m \geq 2$ vektorová.

Důkaz:

$$
\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{A}) \arrow[r, "\mathbb{X}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{Y}"'] & (R^n, \mathcal{B}^n) \arrow[r, "g"] & (R^m, \mathcal{B}^m)
\end{tikzcd}
$$

Aby zobrazení $\mathbf{Y}: \Omega \to R^m$ bylo náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$, musí platit: $\forall B \in \mathcal{B}^m$: $\mathbf{Y}^{inv}(B) = \{\omega \in \Omega; \mathbf{Y}(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$. Nechť tedy $B \in \mathcal{B}^m$. Protože **g** je borelovská funkce, je $\mathbf{g}^{inv}(B) \in \mathcal{B}^n$. Protože **X** je náhodná veličina, je $\mathbf{X}^{inv}(\mathbf{g}^{inv}(B)) \in \mathcal{A}$. Ovšem $\mathbf{X}^{inv}(\mathbf{g}^{inv}(B)) = \mathbf{Y}^{inv}(B)$.

Transformovaná náhodná veličina

7.6. Poznámka: (Příklady transformovaných náhodných veličin) Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor.
a) Nechť $\{i, \ldots, j\} = \{1, \ldots, n\} - \{k, \ldots, l\}$. Náhodný vektor $(X_i, \ldots, X_j)$ se nazývá vybraný marginální vektor, $(X_k, \ldots, X_l)$ se nazývá zbylý marginální vektor. Původní náhodný vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ se v této souvislosti nazývá zbylý marginální vektor.
b) $\sum_{i=1}^{n} X_i, \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \sin(X_i), \ldots$ jsou transformované náhodné veličiny.

7.7. Definice: Posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ spočetně mnoha náhodných veličin definovaných na témž měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ se nazývá náhodná posloupnost.

Distribuční funkce náhodné veličiny

8.1. Motivace: Při pozorování realizací náhodné veličiny si povšimneme, že některé její hodnoty se vyskytují s větší pravděpodobností, jiné s menší. Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny X budeme popisovat pomocí distribuční funkce, která udává pravděpodobnost jevu, že náhodná veličina X se realizuje hodnotou nejvýše x:

$$\boxed{\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R} : \Phi(\mathrm{x}) = P(X \leq x)}$$

Je to zidealizovaný protějšek empirické distribuční funkce zavedené v popisné statistice:

$$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R} : \mathrm{F}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{X} \leq \mathrm{x})}{\mathrm{n}}$$

Lze očekávat, že s rostoucím rozsahem výběrového souboru se budou hodnoty empirické distribuční funkce F(x) ustalovat kolem hodnot distribuční funkce Φ(x). Vlastnosti empirické distribuční funkce se přenášejí i na distribuční funkci.

Distribuční funkce náhodné veličiny

8.2. Definice:

a) Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $X : \Omega \mapsto R$ je skalární náhodná veličina. Funkce $\Phi : R \mapsto R$ daná vzorcem:

$\forall x \in R : \Phi(x) = P(X \leq x)$

se nazývá **distribuční funkce** náhodné veličiny X.

b) Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \mapsto R^n$ je náhodný vektor. Funkce $\Phi : R^n \mapsto R$ daná vzorcem:

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n)$

se nazývá **distribuční funkce** náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Příklad

8.3. Příklad: Najděte distribuční funkci náhodné veličiny X, která udává, jaké číslo padlo při hodu kostkou a nakreslete graf této distribuční funkce.

Řešení:

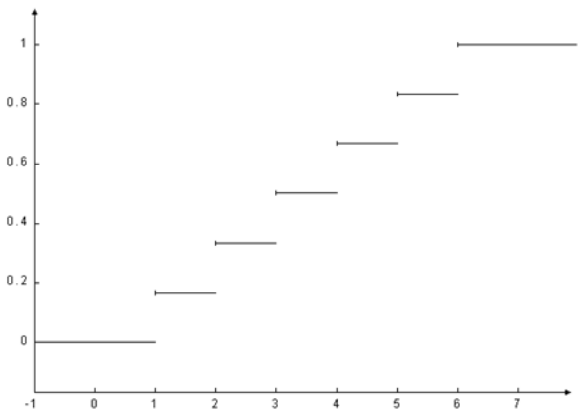
Náhodná veličina X může nabývat hodnot 1, 2, 3, 4, 5, 6. Číselnou osu tedy rozdělíme na 7 intervalů.

$x \in (-\infty, 1)$: $\Phi(x) = P(X \le x) = 0$, $x \in \langle 1, 2)$: $\Phi(x) = P(X \le x) = \frac{1}{6}$

$x \in \langle 2, 3)$: $\Phi(x) = P(X \le x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$, $x \in \langle 3, 4)$: $\Phi(x) = P(X \le x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

$x \in \langle 4, 5)$: $\Phi(x) = P(X \le x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$, $x \in \langle 5, 6)$: $\Phi(x) = P(X \le x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$x \in \langle 6, \infty)$: $\Phi(x) = P(X \le x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$



Vlastnosti distribuční funkce NV

8.4. Věta:

Nechť $\Phi(x)$ je distribuční funkce skalární náhodné veličiny X. Pak $\Phi(x)$ má následující vlastnosti:

a) $\Phi(x)$ je neklesající, tj. $\forall x_1 < x_2 : \Phi(x_1) \leq \Phi(x_2)$.

b) $\Phi(x)$ je zprava spojitá, tj. pro libovolné, ale pevně dané $x_0 \in R$ je $\lim\limits_{x \to x_{0+}} \Phi(x) = \Phi(x_0)$.

c) $\Phi(x)$ je normovaná, tj. $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$.

d) $\forall a, b \in R, a < b \Rightarrow P(a < X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

e) Pro libovolné, ale pevně dané $x_0 \in R : P(X = x_0) = \Phi(x_0) - \lim\limits_{x \to x_{0-}} \Phi(x)$.

Důkaz: Jenom náznakem.

ad a) Plyne z monotonie pravděpodobnosti P9.

ad b) Plyne ze spojitosti pravděpodobnosti shora P17.

ad c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to\infty} P(X \leq x) = P(\Omega) = 1$

ad d) Plyne ze subtraktivity pravděpodobnosti P8.

ad e) Plyne ze spojitosti pravděpodobnosti zdola P16.

P9: $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_2) \leq P(A_1)$

P17: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i)$

P8: $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_2 - A_1) = P(A_2) - P(A_1)$

P16: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim\limits_{i\to\infty} P(A_i)$

Příklad

8.6. Příklad: Náhodná veličina X udává denní počet obsazených pokojů v určitém penziónu. Známe její distribuční funkci, tj. pravděpodobnost, že bude obsazeno nejvýše x pokojů:

$$\Phi(x)=\begin{cases} 0 \text{pro} x<7 \\ 0{,}02 \text{pro} 7\le x<8 \\ 0{,}05 \text{pro} 8\le x<9 \\ 0{,}12 \text{pro} 9\le x<10 \\ 1 \text{pro} x\ge 10 \end{cases}$$

a) Určete pravděpodobnost, že v náhodně zvolený den bude obsazeno právě 7, 8, 9, 10 pokojů.
b) Jaká je pravděpodobnost, že bude obsazeno nejvýše 10 a nejméně 8 pokojů?

Řešení:

ad a) Využijeme vlastnost (e) z věty 8.4.

$$P(X=7)=\Phi(7)-\lim_{x\to 7_-}\Phi(x)=0{,}02-0=0{,}02$$

$$P(X=8)=\Phi(8)-\lim_{x\to 8_-}\Phi(x)=0{,}05-0{,}02=0{,}03$$

$$P(X=9)=\Phi(9)-\lim_{x\to 9_-}\Phi(x)=0{,}12-0{,}05=0{,}07$$

$$P(X=10)=\Phi(10)-\lim_{x\to 10_-}\Phi(x)=1-0{,}12=0{,}88$$

ad b) Využijeme vlastnost (d) z věty 8.4.

$$P(8\le X\le 10)=P(7<X\le 10)=\Phi(10)-\Phi(7)=1-0{,}02=0{,}98$$

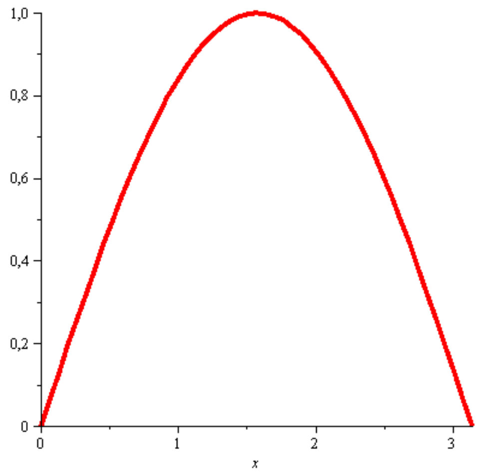
Příklad

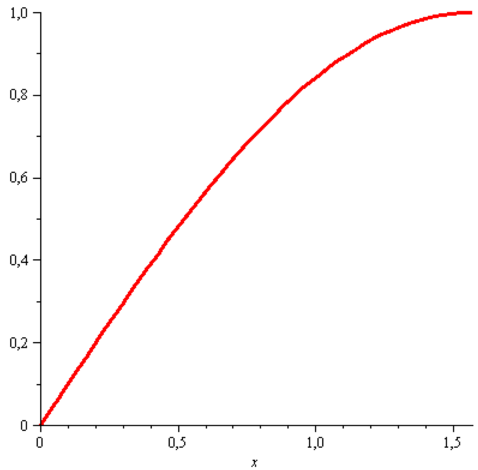
Je funkce $\Phi(x) = \sin x$ distribuční funkcí náhodné veličiny X v intervalu

$a)\ \langle 0, \pi \rangle$,

$b)\ \left\langle 0, \pi/2 \right\rangle$?

Řešení: a) NE b) ANO





Příklad

Určete

a) konstanty *A, B* tak, aby funkce $\Phi(x) = A + Be^{-x}$ byla distribuční funkcí náhodné veličiny pro $x \in (0, \infty)$,

b) pravděpodobnost $P(1 < X \le 4)$,

Řešení: a) $0 = \lim_{x \to 0} A + Be^{-x} = A + B \lim_{x \to 0} e^{-x} = A + B$

$1 = \lim_{x \to \infty} A + Be^{-x} = A + \lim_{x \to \infty} Be^{-x} = A$

$\Rightarrow$ $A = 1$, $B = -1$

$\Rightarrow$ $\Phi(x) = 1 - e^{-x}$

b) $P(1 < X \le 4) = \Phi(4) - \Phi(1) = \dfrac{e^3 - 1}{e^4} = 0{,}3496$

Vlastnosti distribuční funkce náhodného vektoru

8.6. Věta: Nechť $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je distribuční funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ má následující vlastnosti:

a) $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je neklesající vzhledem ke každé jednotlivé proměnné.

b) $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je zprava spojitá vzhledem ke každé jednotlivé proměnné.

c) $$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} \Phi(x_1, \ldots, x_n) = 1$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim_{x_i \to -\infty} \Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

d) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n, \forall (h_1, \ldots, h_n) \in R^n_+ :$

$$P(x_1 < X_1 \leq x_1 + h_1 \wedge \ldots \wedge x_n < X_n \leq x_n + h_n) = \Phi(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_1 + h_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n + h_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \Phi(x_1 + h_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n + h_n) - \ldots + (-1)^n \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

e) $$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{i-1} \to \infty \\ x_{i+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_i(x_i).$$

Vlastnosti distribuční funkce náhodného vektoru

Důkaz: Jenom náznakem.

ad a), ad b) Podobně jako ve skalárním případě.

ad c)

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} \Phi(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} P(X_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_n \leq x_n) = P(X_1 \in R \wedge \dots \wedge X_n \in R) = P(\Omega) = 1$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \lim_{x_i \to -\infty} \Phi(x_1, \dots, x_n) = \lim_{x_i \to -\infty} P(X_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_i \leq x_i \wedge \dots \wedge X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge \varnothing_i \wedge \dots \wedge X_n \leq x_n) = P(\varnothing) = 0$$

ad d) Vlastnost vyjadřuje princip inkluze a exkluze.

ad e)

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{1-1} \to \infty \\ x_{1+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} \Phi(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_{1-1} \to \infty \\ x_{1+1} \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} P(X_1 \leq x_1 \wedge \dots \wedge X_n \leq x_n) = P(X_1 \in R \wedge \dots \wedge X_i \leq x_i \wedge \dots \wedge X_n \in R) = P(\Omega \wedge \dots \wedge X_i \leq x_i \wedge \dots \wedge \Omega) =$$

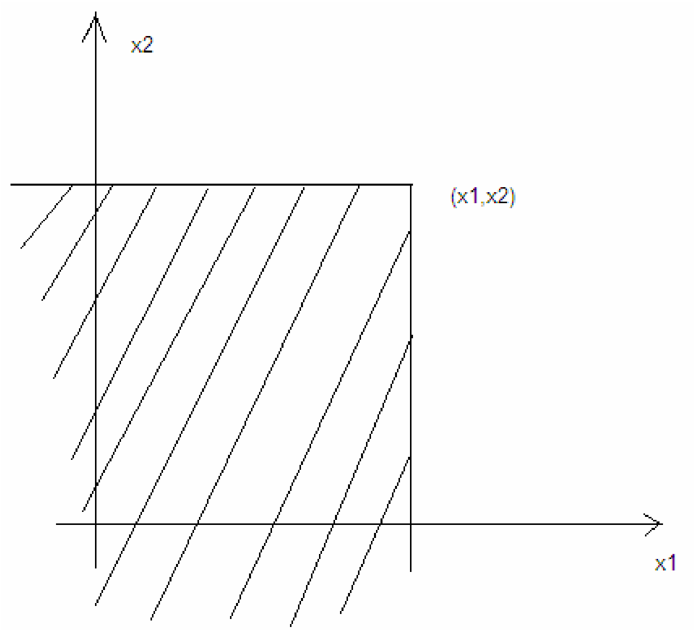
$$= P(X_i \leq x_i) = \Phi_i(x_i)$$

Marginální/simultánní distribuční funkce

Funkce $\Phi_i(x_i)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Nazývá se **marginální distribuční funkce** a $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ se v této souvislosti nazývá **simultánní distribuční funkce**. Analogicky lze zavést marginální distribuční funkce k proměnných, $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Vlastnosti distribuční funkce náhodného vektoru

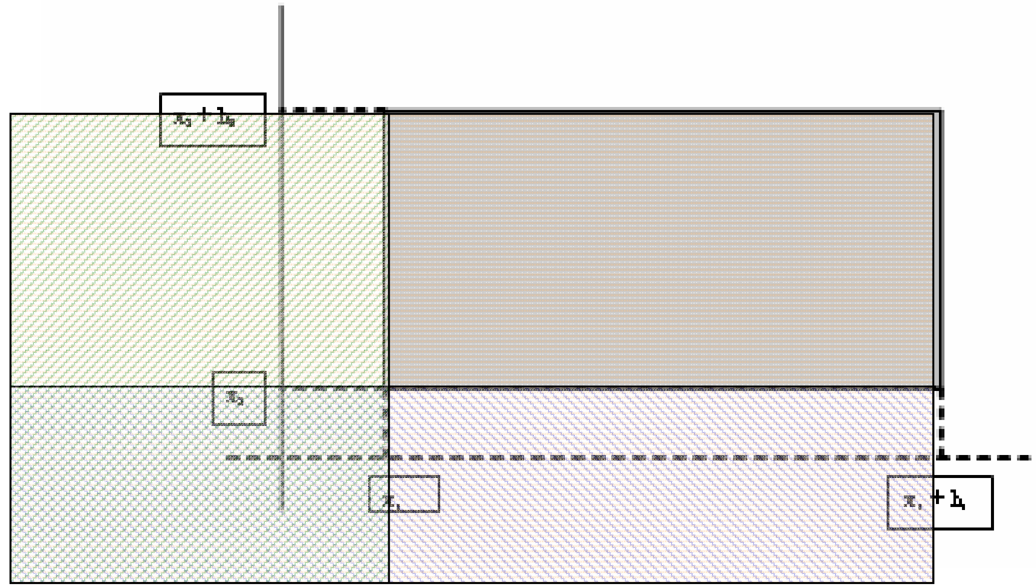
8.7. Poznámka: (Ilustrace vlastnosti (d) z věty 8.6. pro n = 2)
Pro libovolné $(x_1, x_2) \in R^2$ udává $\Phi(x_1, x_2)$ pravděpodobnost, že náhodný vektor (X_1, X_2) se bude realizovat v oblasti $(-\infty, x_1\rangle \times (-\infty, x_2\rangle$:



Vlastnosti distribuční funkce náhodného vektoru

Pro libovolné $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ nás zajímá pravděpodobnost, že náhodný vektor (X_1, X_2) se bude realizovat v obdélníku $(x_1, x_1 + h_1\rangle \times (x_2, x_2 + h_2\rangle$:

$$P\left(x_1 < X_1 \le x_1 + h_1 \wedge x_2 < X_2 \le x_2 + h_2\right) =$$
$$= \boxed{\Phi\left(x_1 + h_1, x_2 + h_2\right)} - \boxed{\Phi\left(x_1 + h_1, x_2\right)} - \boxed{\Phi\left(x_1, x_2 + h_2\right)} + \boxed{\Phi\left(x_1, x_2\right)}$$



Příklad

8.8. Příklad: Náhodný vektor (X_1, X_2) má distribuční funkci $\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2}(\text{arctg } x_1 + \frac{\pi}{2})(\text{arctg } x_2 + \frac{\pi}{2})$.
Vypočtěte pravděpodobnost, že náhodný vektor (X_1, X_2) se bude realizovat v jednotkovém čtverci $(0,1\rangle \times (0,1\rangle$.
Najděte obě marginální distribuční funkce $\Phi_1(x_1)$, $\Phi_2(x_2)$.

Řešení:

$P(0 < X_1 \leq 1 \wedge 0 < X_2 \leq 1) = \Phi(1,1) - \Phi(1,0) - \Phi(0,1) + \Phi(0,0) =$

$= \frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})(0 + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{\pi^2}(0 + \frac{\pi}{2})(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\pi^2}(0 + \frac{\pi}{2})(0 + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{16}$.

$\Phi_1(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} \frac{1}{\pi^2}(\text{arctg } x_1 + \frac{\pi}{2})(\text{arctg } x_2 + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}(\text{arctg } x_1 + \frac{\pi}{2})$

$\Phi_2(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{1}{\pi^2}(\text{arctg } x_1 + \frac{\pi}{2})(\text{arctg } x_2 + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}(\text{arctg } x_2 + \frac{\pi}{2})$

Existence distribuční funkce

8.9. Věta: (existenční věta)

a) Skalární případ: Jestliže funkce $\Phi(x)$ má vlastnosti (a), (b), (c) z věty o vlastnostech distribuční funkce skalární náhodné veličiny, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaná skalární náhodná veličina X tak, že $\Phi(x)$ je její distribuční funkce.

b) Vektorový případ: Jestliže funkce $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ má vlastnosti (a), (b), (c) z věty o vlastnostech distribuční funkce náhodného vektoru, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ tak, že $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho distribuční funkce.