Diskrétní náhodná veličina - motivace

9.1. Motivace: Distribuční funkce popisuje pravděpodobnostní chování jakékoliv náhodné veličiny. V praxi však mají význam dva speciální typy náhodných veličin, a to diskrétní a spojité náhodné veličiny.

Diskrétní náhodná veličina nabývá nejvýše spočetně mnoha izolovaných hodnot. Je to např.
počet zásahů do terče při střelbě,
počet chyb, jichž se dopustí nějaké zařízení za určitou dobu,
počet zákazníků ve frontě apod.

Pravděpodobnostní chování diskrétní náhodné veličiny popisujeme pravděpodobnostní funkcí:

$$\forall x \in R : \pi(x) = P(X = x).$$

Je to zidealizovaný protějšek četnostní funkce zavedené v popisné statistice v souvislosti s bodovým rozložením četností:

$$\forall x \in R : p(x) = \frac{N(X = x)}{n}.$$

S rostoucím rozsahem výběrového souboru se budou hodnoty četnostní funkce ustalovat kolem hodnot pravděpodobnostní funkce.

Vlastnosti četnostní funkce se přenášejí i na pravděpodobnostní funkci, tedy pravděpodobnostní funkce

je nezáporná $\forall x \in R : \pi(x) \geq 0$,

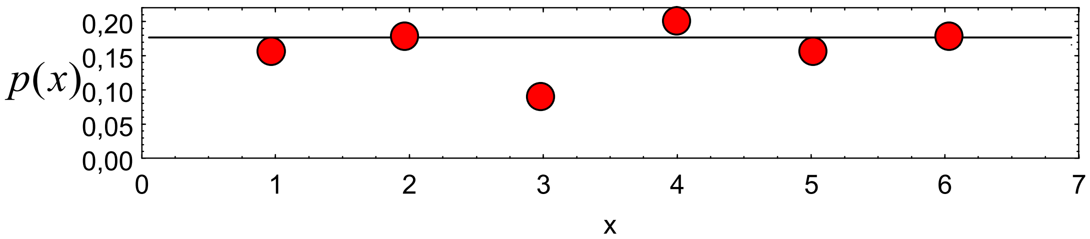
je normovaná $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \pi(x) = 1$,

s distribuční funkcí je spjata součtovým vztahem $\forall x \in R : \Phi(x) = \sum_{t \leq x} \pi(t)$

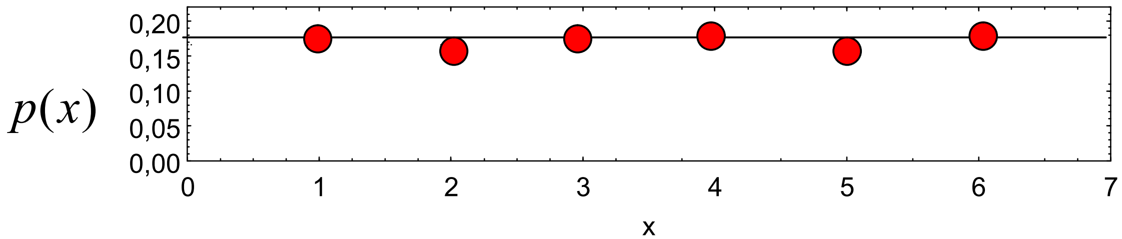
Ilustrace vztahu mezi četnostní funkcí a pravděpodobnostní funkcí

Provedeme n hodů kostkou. Zajímáme se o četnostní funkci počtu ok.

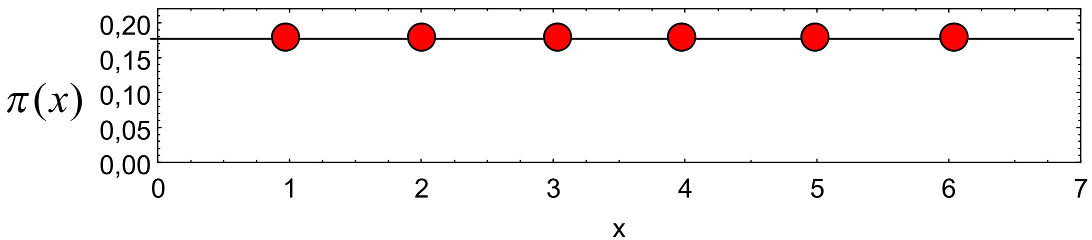
n = 60:



n = 600:



$n \to \infty$:



Spojitá náhodná veličina - motivace

Spojitá náhodná veličina nabývá všech hodnot z nějakého intervalu. Je to např.
výsledek nějakého fyzikálního či chemického měření,
hektarový výnos pšenice,
hmotnost sériově vyráběného výrobku apod.
Pravděpodobnostní chování spojité náhodné veličiny popisujeme hustotou pravděpodobnosti $\varphi(x)$, což je zidealizovaný protějšek hustoty četnosti f(x) zavedené v popisné statistice v souvislosti s intervalovým rozložením četností. S rostoucím rozsahem výběrového souboru a klesajícími šířkami třídicích intervalů se budou hodnoty hustoty četnosti ustalovat kolem hodnot hustoty pravděpodobnosti.
Vlastnosti hustoty četnosti se přenášejí i na hustotu pravděpodobnosti, tedy hustota pravděpodobnosti

je nezáporná $\forall x \in R : \varphi(x) \geq 0$,

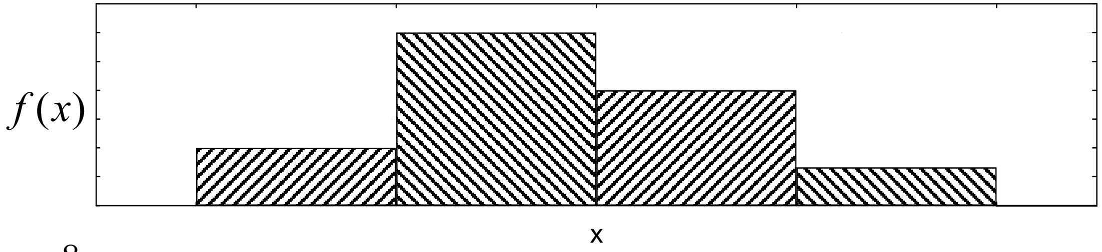
je normovaná $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$,

s distribuční funkcí je spjata integrálním vztahem $\forall x \in R : \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt$

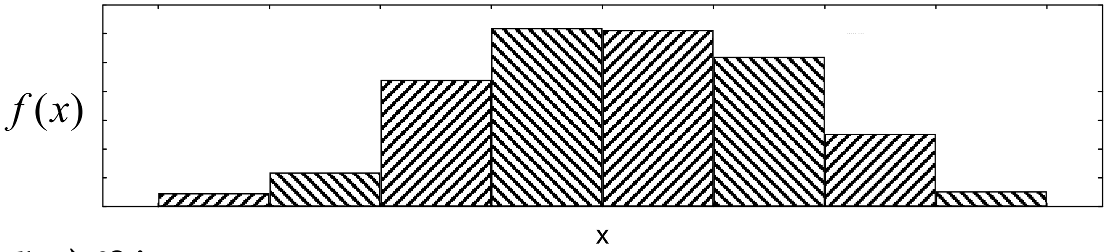
Ilustrace vztahu mezi hustotou četnosti a hustotou pravděpodobnosti

Náhodně vybereme n sériově vyráběných součástek, změříme jejich délku a budeme se zajímat hustotu četnosti odchylek těchto měření od deklarované délky součástky.

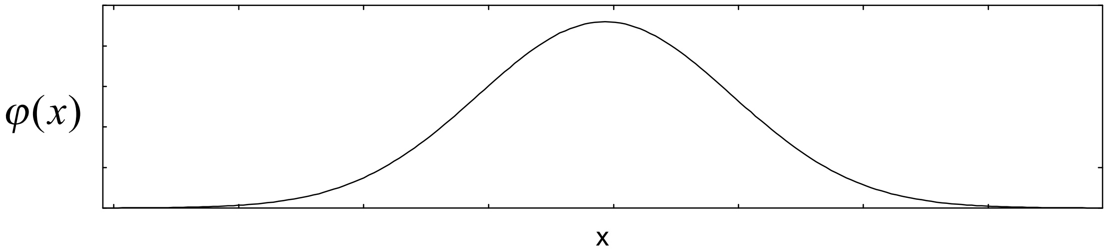
n = 40, r = 4:



n= 400, r = 8:



$n \to \infty, r \to \infty:$



Diskrétní náhodná veličina

9.2. Definice:

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X náhodná veličina definovaná na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, která má distribuční funkci $\Phi(x)$. Řekneme, že náhodná veličina X je **diskrétní** (vzhledem k P), právě když existuje reálná funkce $\pi(x)$, která je nulová v R s výjimkou nejméně jednoho a nejvýše spočetně mnoha bodů, kde je kladná a platí pro ni: $\forall x \in R : \Phi(x) = \sum_{t \leq x} \pi(t)$. Tato funkce se nazývá **pravděpodobnostní funkce** diskrétní náhodné veličiny X.

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

9.3. Věta:

Nechť $\pi(x)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny X. Pak platí:

a) $\forall x \in R : \pi(x) \geq 0$ (vlastnost D1 – nezápornost)

b) $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \pi(x) = 1$ (vlastnost D2 – normovanost)

c) $\forall x \in R : \pi(x) = P(X = x)$

d) $\forall B \in \mathcal{B} : P(X \in B) = \sum_{x \in B} \pi(x)$.

Důkaz:

ad a) Vlastnost D1 je součást definice.

ad b) $\sum_{x=-\infty}^{\infty} \pi(x) = \lim_{t\to\infty} \sum_{x=-\infty}^{t} \pi(x) = \lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 1$

ad c) $P(X = x_0) = \Phi(x_0) - \lim_{x\to x_{0-}} \Phi(x) = \sum_{t\leq x_0} \pi(t) - \lim_{x\to x_{0-}} \sum_{t\leq x} \pi(t) = \lim_{x\to x_{0-}} \sum_{x<t\leq x} \pi(t) = \pi(x_0)$

ad d) Označme $G \subseteq R$ tu nejvýše spočetnou množinu, na níž $\pi(x)$ nabývá kladných hodnot. Pak pro libovolnou borelovskou množinu B platí:

$$P(X \in B) = P(X \in B \cap G) + P(X \in B \cap \overline{G}) = P\left(X \in \bigcup_{x \in B \cap G} \{x\} \right) + 0 = \sum_{x \in B \cap G} P(X = x) = \sum_{x \in B} \pi(x)$$

Příklad

9.4. Příklad: Náhodná veličina X udává počet líců při hodu dvěma mincemi. Určete její pravděpodobnostní a distribuční funkci a nakreslete jejich grafy.

Řešení:

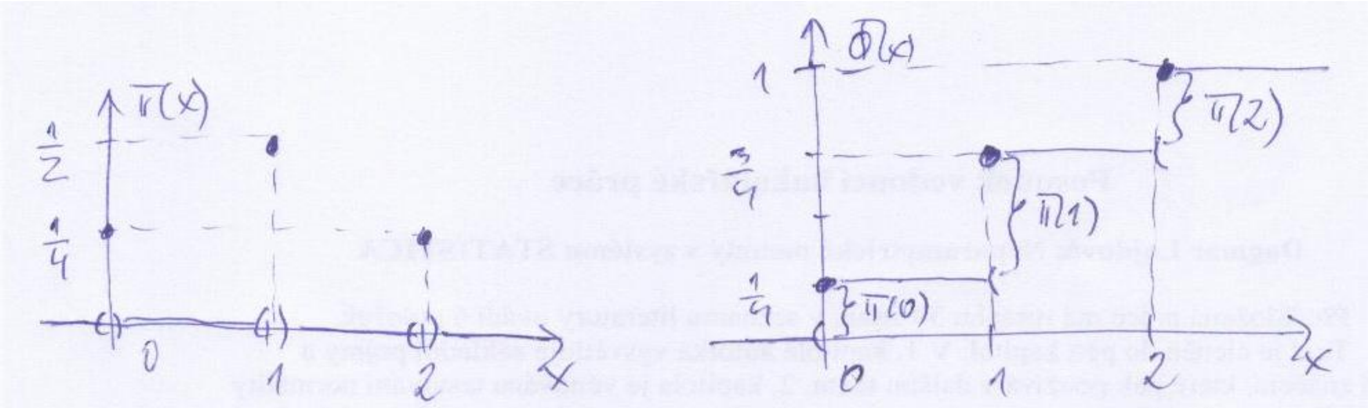
Základní prostor: $\Omega = \{[L,L][L,R][R,L][R,R]\}$, jevové pole: maximální, pravděpodobnost: klasická, náhodná veličina X nabývá hodnot z množiny {0, 1, 2}.

$$\pi(0) = P(X=0) = \frac{1}{4} \qquad x \in (-\infty,0): \Phi(x) = 0$$

$$\pi(1) = P(X=1) = \frac{2}{4} \qquad x \in \langle 0,1): \Phi(x) = \pi(0) = \frac{1}{4}$$

$$\pi(2) = P(X=2) = \frac{1}{4} \qquad x \in \langle 1,2): \Phi(x) = \pi(0) + \pi(1) = \frac{3}{4}$$

$$\pi(x) = 0 \text{ jinak} \qquad x \in \langle 2,\infty): \Phi(x) = \pi(0) + \pi(1) + \pi(2) = 1$$



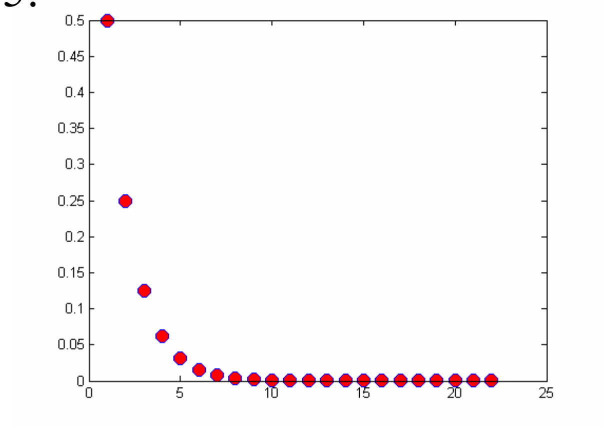
Příklad

Dva střelci (s pravděpodobnostmi zásahu p_1 a p_2) se střídají ve střelbě, dokud někdo nezasáhne. Určete pravděpodobnostní funkci počtu výstřelů.

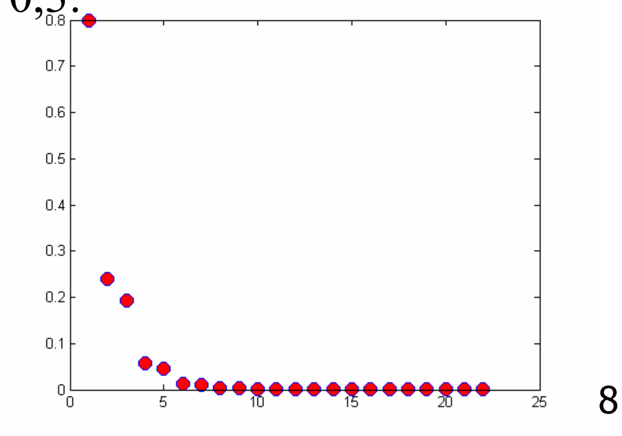
Řešení:

$$\pi(2n+1) = (1-p_1)^n (1-p_2)^n p_1$$
$$\pi(2n+2) = (1-p_1)^{n+1} (1-p_2)^n p_2 \quad n = 0,1,\ldots$$

Pro $p_1 = p_2 = 0,5$:



Pro $p_1 = 0,8$ a $p_2 = 0,3$:



Příklad

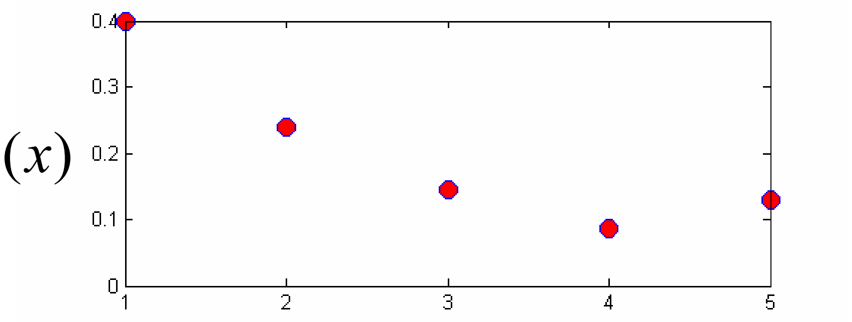
Lovec má 5 patron a pravděpodobnost zásahu 0,4. Střílí, dokud netrefí (a dokud má čím). Určete pravděpodobnostní funkci.

Řešení:

$$\pi(k) = 0{,}6^{k-1} \cdot 0{,}4 \quad k = 1, \dots, 4$$

$$\pi(5) = 0{,}6^{4}$$

$\pi(x)$



Diskrétní náhodný vektor

9.5. Poznámka: Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny má schodovitý průběh. Pravděpodobnostní funkce je distribuční funkcí určena jednoznačně.

9.6. Definice:

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ náhodný vektor definovaný na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Nechť $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho distribuční funkce. Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ je **diskrétní** (vzhledem k P), právě když existuje reálná funkce $\pi(x_1, \ldots, x_n)$, která je nulová v R^n s výjimkou nejméně jednoho a nejvýše spočetně mnoha bodů, kde je kladná a platí pro ni:

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t_1 \le x_1} \ldots \sum_{t_n \le x_n} \pi(t_1, \ldots, t_n)$. Tato funkce se nazývá **pravděpodobnostní funkce** diskrétního náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Vlastnosti pravděpodobnostní funkce

9.7. Věta:

Nechť $\pi(x_1,\ldots,x_n)$ je pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak platí:

a) $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in R^n : \pi(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$ (vlastnost D1 – nezápornost)

b) $\sum\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum\limits_{x_n=-\infty}^{\infty} \pi(x_1,\ldots,x_n) = 1$ (vlastnost D2 – normovanost)

c) $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in R^n : \pi(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge X_n = x_n)$

d) $\forall B \in \mathcal{B}^n : P(\mathbf{X} \in B) = \sum\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in B} \ldots \sum \pi(x_1,\ldots,x_n)$

e) $\forall i \in \{1,\ldots,n\} : \sum\limits_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum\limits_{x_{i-1}=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{x_{i+1}=-\infty}^{\infty} \cdots \sum\limits_{x_n=-\infty}^{\infty} \pi(x_1,\ldots,x_n) = \pi_i(x_i)$.

Funkce $\pi_i(x_i)$ je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X_i. Nazývá se **marginální pravděpodobnostní funkce**. Funkce $\pi(x_1,\ldots,x_n)$ se v této souvislosti nazývá **simultánní pravděpodobnostní funkce**. Podobně lze zavést marginální pravděpodobnostní funkce k proměnných, kde $k \in \{2,3,\ldots,n-1\}$.

Příklad

9.8. Příklad: Je dán systém složený ze dvou bloků. Pravděpodobnost, že i-tý blok správně funguje, je υ_i, $i = 1, 2$ a pravděpodobnost, že správně fungují oba bloky, je υ_{12}. Nechť náhodná veličina X_i je ukazatel fungování i-tého bloku, tj. $X_i = \begin{cases} 1, \text{pokud i - tý blok funguje} \\ 0, \text{pokud i - tý blok nefunguje} \end{cases}$, $i = 1, 2$. Najděte simultánní pravděpodobnostní funkci $\pi(x_1, x_2)$ náhodného vektoru (X_1, X_2) a obě marginální pravděpodobnostní funkce $\pi_1(x_1)$ a $\pi_2(x_2)$.

Řešení:

Hodnoty pravděpodobnostních funkcí zapíšeme do kontingenční tabulky.

x_1	x_2		$\pi_1(x_1)$
	0	1	
0	$1-\vartheta_1-\vartheta_2+\vartheta_{12}$	$\vartheta_2-\vartheta_{12}$	$1-\vartheta_1$
1	$\vartheta_1-\vartheta_{12}$	ϑ_{12}	ϑ_1
$\pi_2(x_2)$	$1-\vartheta_2$	ϑ_2	1

$\pi(0,0) = P(X_1=0 \wedge X_2=0) = 1 - P(X_1=1 \vee X_2=1) = 1 - (\upsilon_1 + \upsilon_2 - \upsilon_{12}) = 1 - \upsilon_1 - \upsilon_2 + \upsilon_{12}$

$\pi(0,1) = P(X_1=0 \wedge X_2=1) = P(X_2=1) - P(X_1=1 \wedge X_2=1) = \upsilon_2 - \upsilon_{12}$

$\pi(1,0) = P(X_1=1 \wedge X_2=0) = P(X_1=1) - P(X_1=1 \wedge X_2=1) = \upsilon_1 - \upsilon_{12}$

$\pi(1,0) = P(X_1=1 \wedge X_2=0) = \upsilon_{12}$

$\pi(x_1,x_2) = 0$ jinak

Existenční věta

9.9. Věta (existenční věta)

a) Skalární případ: Jestliže funkce $\pi(x)$ má vlastnosti D1, D2 z věty o vlastnostech pravděpodobnostní funkce skalární náhodné veličiny, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaná skalární diskrétní náhodná veličina X tak, že $\pi(x)$ je její pravděpodobnostní funkce.

b) Vektorový případ: Jestliže funkce $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ má vlastnosti D1, D2 z věty o vlastnostech pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaný diskrétní náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ tak, že $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho pravděpodobnostní funkce.

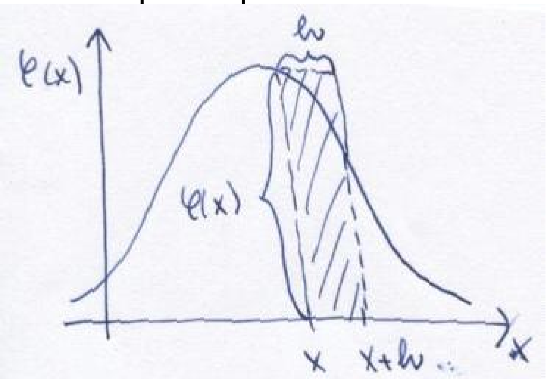
Spojitá náhodná veličina

9.10. Definice:

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, X náhodná veličina definovaná na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$, která má distribuční funkci $\Phi(x)$. Řekneme, že náhodná veličina X je **spojitá** (vzhledem k P), právě když existuje po částech spojitá nezáporná reálná funkce $\varphi(x)$ tak, že pro $\forall x \in R : \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$. Tato funkce se nazývá **hustota pravděpodobnosti** spojité náhodné veličiny X.

Spojitá náhodná veličina - poznámka

9.11. Poznámka: Na rozdíl od pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny nemá hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny význam pravděpodobnosti. Její význam lze odvodit z integrálního vztahu mezi distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti.



Pravděpodobnost, že náhodná veličina se bude realizovat v intervalu (x, x+h], je:

$$P(x < X \leq x + h) = \Phi(x + h) - \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x+h} \varphi(t)dt - \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{x}^{x+h} \varphi(t)dt$$

Bude-li h dostatečně malé číslo, lze plochu pod grafem hustoty nahradit obsahem obdélníka o stranách φ(x) a h, tj.

$$P(x < X \leq x + h) \approx \varphi(x) \cdot h$$

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti

9.12. Věta:

Nechť $\varphi(x)$ je hustota spojité náhodné veličiny X. Pak platí:

a) $\forall x \in R : \varphi(x) \geq 0$ (vlastnost S1 - nezápornost)

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$ (vlastnost S2 - normovanost)

c) $\forall x \in R, \forall h > 0 : P(x < X \leq x + h) = \int\limits_{x}^{x+h} \varphi(t)dt$

d) Pro libovolné, ale pevně dané $x \in R : P(X = x) = 0$.

e) $\varphi(x) = \frac{d\Phi(x)}{dx}$ ve všech bodech spojitosti funkce $\varphi(x)$.

Důkaz:

ad a) Vlastnost S1 je součást definice.

ad b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$

ad c) $\int\limits_{x}^{x+h} \varphi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x+h} \varphi(t)dt - \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \Phi(x+h) - \Phi(x) = P(x < X \leq x + h)$

ad d) $P(X = x) = \int\limits_{x}^{x} \varphi(t)dt = 0$

ad e) $\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \varphi(x)$ ve všech bodech spojitosti funkce $\varphi(x)$.

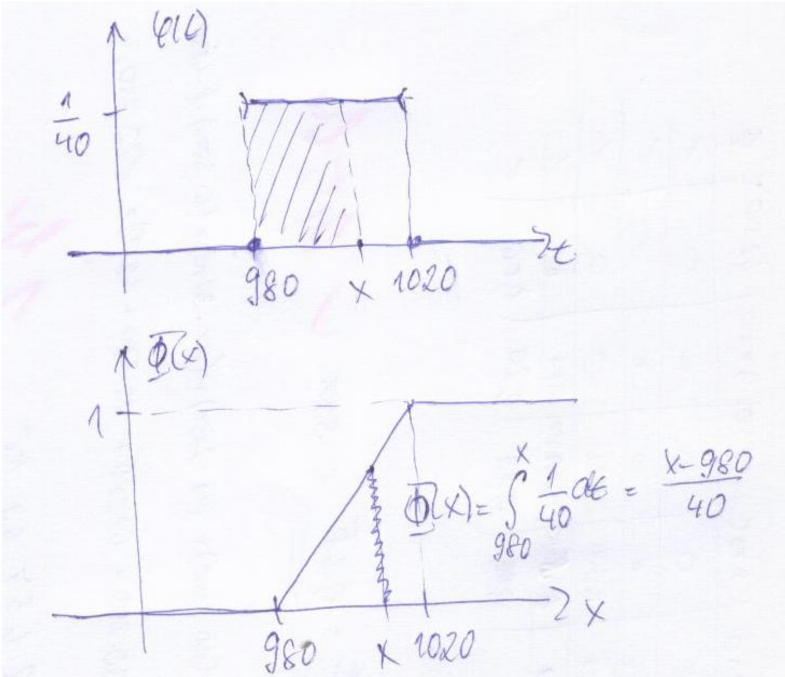
Příklad

9.13. Příklad: Na automatické lince se plní láhve mlékem. Každá láhev má obsahovat přesně 1000 ml mléka, ale v důsledku působení náhodných vlivů množství mléka kolísá v intervalu (980 ml, 1020 ml). Každé množství mléka v tomto intervalu považujeme za stejně možné. Náhodná veličina X udává množství mléka v náhodně vybrané lahvi. Najděte její hustotu pravděpodobnosti φ(x) a distribuční funkci Φ(x). Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané láhvi bude aspoň 1000 ml mléka?

Řešení: $\varphi(x) = \begin{cases} k \text{ pro } x \in (980, 1020) \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$

Z normovanosti hustoty plyne: $1 = \int_{980}^{1020} k\,dx = 40\,k$, tedy $k = \frac{1}{40}$.

Pro distribuční funkci platí: $\Phi(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \le 980 \\ \int_{980}^{x} \frac{1}{40}\,dt = \frac{x-980}{40} \text{ pro } 980 < x < 1020 \\ 1 \text{ pro } x \ge 1020 \end{cases}$



$$P(X \ge 1000) = \int_{1000}^{1020} \frac{1}{40}\,dx = \frac{1}{40}[x]_{1000}^{1020} = \frac{20}{40} = 0{,}5$$

Příklad

Napište distribuční funkci rozdělení daného hustotou f(x) = x/2 na (0, 1), 1/2 na (1, 2), (3 − x)/2 na (2, 3).

Řešení: $\text{Na}\,(0,1):$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \frac{t}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{4},$$

$\text{Na}\,(1,2):$

$$F(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(x-1),$$

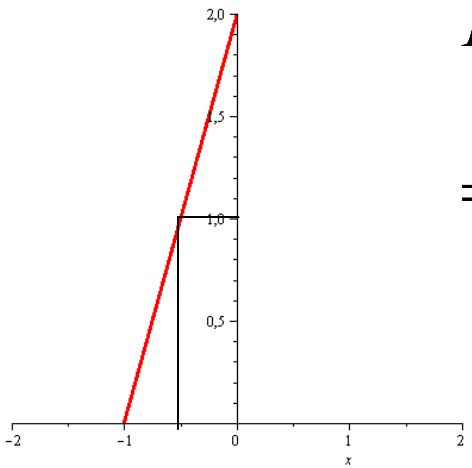
$\text{Na}\,(2,3):$

$$F(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\int_2^x \frac{3-t}{2}\,dt=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{(3-t)^2}{2}\right]_2^x=1-\frac{(3-x)^2}{4}.$$

Příklad

Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou f(x) = 2x+2, na (−1, 0) a nulovou jinde.
Najděte $P(-2 \le X \le -0{,}5)$.

Řešení:



$$P(-2 \le X \le -0{,}5) = P(-1 \le X \le -0{,}5) =$$

$$= \int_{-1}^{-0{,}5} 2x + 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Příklad

Náhodná veličina X má hustotu $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ na R.

Určete a, distribuční funkci, $P\left(X > \sqrt{3}\right)$.

Řešení:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = a\left(\lim_{x\to\infty} arctg(x) - \lim_{x\to-\infty} arctg(x)\right) =$$

$$= a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(arctg(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$P\left(X > \sqrt{3}\right) = 1 - F\left(\sqrt{3}\right) = 1 - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Spojitý náhodný vektor

9.14. Definice:

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ náhodný vektor definovaný na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$. Nechť $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho distribuční funkce. Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}$ je **spojitý** (vzhledem k P), právě když existuje po částech spojitá nezáporná reálná funkce $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ tak, že pro

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} \varphi(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$. Tato funkce se nazývá **hustota pravděpodobnosti** spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti

9.15. Věta: Nechť $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ je hustota pravděpodobnosti spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Pak platí:

a) $\forall(x_1,\dots,x_n) \in R^n : \varphi(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ (vlastnost S1 - nezápornost)

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,\dots,x_n)dx_1 \dots dx_n = 1$ (vlastnost S2 - normovanost)

c) $\forall B \in \mathcal{B}^n : P(\mathbf{X} \in B) = \int \dots \int\limits_B \varphi(x_1,\dots,x_n)dx_1 \dots dx_n$

d) $\varphi(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^n \Phi(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$ ve všech bodech spojitosti funkce $\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

e) $\forall i \in \{1,\dots,n\} : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,\dots,x_n)dx_1 \dots dx_{i-1}dx_{i+1} \dots dx_n = \varphi_i(x_i)$.

Funkce $\varphi_i(x_i)$ je hustota náhodné veličiny X_i. Nazývá se **marginální hustota**. Funkce $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ se v této souvislosti nazývá **simultánní hustota**. Podobně lze zavést marginální hustoty k proměnných, kde $k \in \{2,3,\dots,n-1\}$.

Existenční věta

9.16. Věta: (existenční věta)

a) Skalární případ: Jestliže funkce $\varphi(x)$ má vlastnosti S1, S2 z věty o vlastnostech hustoty skalární náhodné veličiny, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaná skalární spojitá náhodná veličina X tak, že $\varphi(x)$ je její hustota.

b) Vektorový případ: Jestliže funkce $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ má vlastnosti S1, S2 z věty o vlastnostech hustoty náhodného vektoru, pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a na něm definovaný spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ tak, že $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ je jeho hustota.

Příklad

9.17. Příklad: Spojitý náhodný vektor (X_1, X_2) má simultánní hustotu pravděpodobnosti $\varphi(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\pi^2(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$.

Najděte obě marginální hustoty $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$.

Řešení:

$$\varphi_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\,dx_2 = \frac{1}{\pi^2(1+x_1^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x_2^2}\,dx_2 =$$

$$= \frac{1}{\pi^2(1+x_1^2)} \left[\operatorname{arctg} x_2\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi^2(1+x_1^2)} \left(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right) = \frac{1}{\pi(1+x_1^2)}.$$

Analogicky dostáváme $\varphi_2(x_2) = \dfrac{1}{\pi(1+x_2^2)}$.