Vlastnosti číselných charakteristik NV – střední hodnota

13.1. Věta: Nechť a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 jsou reálná čísla, X, X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_m jsou náhodné veličiny definované na témž pravděpodobnostním prostoru. V následujících vzorcích vždy z existence číselných charakteristik na pravé straně vyplývá existence výrazu na levé straně.

Vlastnosti střední hodnoty

a) $E(a) = a$
b) $E(a + bX) = a + bE(X)$
c) $E(X - E(X)) = 0$
d) $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$
e) Jsou-li náhodné veličiny X_1, ..., X_n stochasticky nezávislé, pak $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

Vlastnosti číselných charakteristik NV – kovariance

Vlastnosti kovariance

a) $C(a_1, X_2) = C(X_1, a_2) = C(a_1, a_2) = 0$

b) $C(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = b_1b_2C(X_1, X_2)$

c) $C(X, X) = D(X)$

d) $C(X_1, X_2) = C(X_2, X_1)$

e) $C(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$

f) $C\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C(X_i, Y_j)$

Vlastnosti číselných charakteristik NV – rozptyl

Vlastnosti rozptylu

a) $D(a) = 0$

b) $D(a + bX) = b^2 D(X)$

c) $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

d) $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} C(X_i, X_j)$ (jsou-li náhodné veličiny X_1, ..., X_n nekorelované, pak $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$)

Vlastnosti číselných charakteristik NV – korelace

Vlastnosti koeficientu korelace

a) $R(a_1, X_2) = R(X_1, a_2) = R(a_1, a_2) = 0$

b) $R(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = \operatorname{sgn}(b_1b_2)\, R(X_1, X_2)$

c) $R(X, X) = 1$ pro $D(X) \neq 0$, $R(X, X) = 0$ jinak

d) $R(X_1, X_2) = R(X_2, X_1)$

e) $$R(X_1, X_2) = \begin{cases} \dfrac{C(X_1, X_2]}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}} & \text{pro } \sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)} > 0 \\ 0 \text{ jinak} & \end{cases}$$

Vlastnosti střední hodnoty - důkaz

Důkaz:

Pro vlastnosti střední hodnoty

ad a) X ~ Dg(a), $\pi(x)=\begin{cases}1 \text{ pro } x=a\\ 0 \text{ jinak}\end{cases}, E(X)=\sum_{x=-\infty}^{\infty} x\pi(x)=a\pi(a)=a\cdot 1=a$

ad b) Diskrétní případ: $E(a+bX)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}(a+bx)\pi(x)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}a\pi(x)+\sum_{x=-\infty}^{\infty}bx\pi(x)=a\sum_{x=-\infty}^{\infty}\pi(x)+b\sum_{x=-\infty}^{\infty}x\pi(x)=a+bE(X)$

Spojitý případ: $E(a+bX)=\int_{-\infty}^{\infty}(a+bx)\varphi(x)dx=a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}x\varphi(x)dx=a+bE(X)$

ad c) Plyne z (b), kde a = -E(X), b = 1.

ad d) Spojitý případ:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+\ldots+x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n+\cdots+\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_2\cdots dx_n\right]dx_1+\cdots+\int_{-\infty}^{\infty}x_n\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_{n-1}\right]dx_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1\varphi_1(x_1)dx_1+\cdots+\int_{-\infty}^{\infty}x_n\varphi_n(x_n)dx_n=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

Vlastnosti střední hodnoty - důkaz

ad d) Diskrétní případ: analogicky jako ve spojitém případě.

ad e) Spojitý případ:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)\varphi(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)\varphi(x_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_n)\,dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1\varphi(x_1)\,dx_1 \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_n\varphi(x_n)\,dx_n =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

ad e) Diskrétní případ: analogicky jako ve spojitém případě.

Vlastnosti kovariance - důkaz

Pro vlastnosti kovariance:

ad a) $C(a_1, X_2) = E([a_1 - E(a_1)][X_2 - E(X_2)]) = E([a_1 - a_1][X_2 - E(X_2)]) = E(0) = 0$

ad b)

$$C(a_1 + b_1X_1, a_2 + b_2X_2) = E([a_1 + b_1X_1 - (a_1 + b_1E(X_1))][a_2 + b_2X_2 - (a_2 + b_2E(X_2))]) = b_1b_2E([X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]) = b_1b_2C(X_1, X_2)$$

ad c) $C(X, X) = E([X - E(X)][X - E(X)]) = E([X - E(X)]^2) = D(X)$

ad d) $C(X_1, X_2) = E([X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]) = E([X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]) = C(X_2, X_1)$

ad e)

$$C(X_1, X_2) = E([X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]) = E(X_1X_2 - X_2E(X_1) - X_1E(X_2) + E(X_1)E(X_2)) = E(X_1X_2) - E(X_2X_1) - E(X_1)E(X_2) + E(X_1)E(X_2) =$$
$$= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

ad f)

$$C\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = E\left(\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{m} Y_j - E\left(\sum_{j=1}^{m} Y_j\right)\right]\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n}[X_i - E(X_i)]\sum_{j=1}^{m}[Y_j - E(Y_j)]\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[X_i - E(X_i)][Y_j - E(Y_j)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C(X_i, Y_j)$$

Vlastnosti rozptylu - důkaz

Pro vlastnosti rozptylu:

ad a) $D(a) = E\left([a - E(a)]^2\right) = E\left([a - a]^2\right) = E(0) = 0$

ad b) $D(a + bX) = E\left([a + bX - E(a + bX)]^2\right) = E\left([a + bX - a - bE(X)]^2\right) =$

$= E\left(b^2 [X - E(X)]^2\right) = b^2 D(X)$

ad c) $D(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E\left(X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\right) =$

$= E\left(X^2\right) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$

ad d) $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = C\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C\left(X_i, X_j\right) =$

$= C(X_1, X_1) + C(X_1, X_2) + \ldots + C(X_1, X_n) + \ldots +$

$+ C(X_n, X_1) + C(X_n, X_2) + \ldots C(X_n, X_n) =$

$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} C\left(X_i, X_j\right)$

Vlastnosti korelace - důkaz

Pro vlastnosti koeficientu korelace:

ad a) Plyne přímo z definice, protože $D(a_1) = D(a_2) = 0$,

ad b) $$R(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) = E\left(\frac{a_1 + b_1 X_1 - E(a_1 + b_1 X_1)}{\sqrt{D(a_1 + b_1 X_1)}} \cdot \frac{a_2 + b_2 X_2 - E(a_2 + b_2 X_2)}{\sqrt{D(a_2 + b_2 X_2)}}\right) =$$

$$= E\left(\frac{a_1 + b_1 X_1 - a_1 - b_1 E(X_1)}{\sqrt{b_1^{\ 2} D(X_1)}} \cdot \frac{a_2 + b_2 X_1 - a_2 - b_2 E(X_2)}{\sqrt{b_2^{\ 2} D(X_2)}}\right) =$$

$$= \frac{b_1}{|b_1|} \cdot \frac{b_2}{|b_2|} R(X_1, X_2) = \operatorname{sgn}(b_1 \cdot b_2) R(X_1, X_2)$$

Vlastnosti korelace - důkaz

ad c) Pro D(X) = 0 plyne přímo z definice, jinak platí

$$R(X,X) = E\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\cdot\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = \frac{1}{D(X)}E\left([X-E(X)]^2\right) = \frac{1}{D(X)}D(X) = 1$$

ad d) Zřejmé.

ad e) $$R(X_1,X_2) = E\left(\frac{X_1-E(X_1)}{\sqrt{D(X_1)}}\cdot\frac{X_2-E(X_2)}{\sqrt{D(X_2)}}\right) =$$

$$= \frac{E\left([X_1-E(X_1)]\cdot[X_2-E(X_2)]\right)}{\sqrt{D(X_1)}\cdot\sqrt{D(X_2)}} = \frac{C(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\cdot\sqrt{D(X_2)}}$$

Příklad

13.2. Příklad:

Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl

a) centrované náhodné veličiny $Y = X - E(X)$,

b) standardizované náhodné veličiny $U = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$.

Řešení:

ad a) $E(Y) = E(X - \mu) = E(X) - E(\mu) = \mu - \mu = 0$, $D(Y) = D(X - \mu) = D(X) = \sigma^2$,

ad b) $E(U) = E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma}E(X - \mu) = \frac{1}{\sigma} . 0 = 0$, $D(U) = D(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2} D(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} . \sigma^2 = 1$.

13.3. Příklad:

Náhodné veličiny X, Z jsou náhodné chyby, které vznikají na vstupním zařízení. Mají střední hodnoty $E(X) = -2$, $E(Y) = 4$ a rozptyly $D(X) = 4$, $D(Y) = 9$. Koeficient korelace těchto chyb je $R(X,Y) = -0{,}5$. Chyba na výstupu zařízení souvisí s chybami na vstupu funkční závislostí $Z = 3X^2 - 2XY + Y^2 - 3$. Najděte střední hodnotu chyby na výstupu.

Řešení: $E(Z) = E(3X^2 - 2XY + Y^2 - 3) = 3E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2) - E(3) = 3\{D(X) + [E(X)]^2\} - 2[C(X,Y) + E(X)E(Y)] + D(Y) + [E(Y)]^2 - 3 = 3[D(X) + [E(X)]^2] - 2[R(X,Y)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} + E(X)E(Y)] + D(Y) + [E(Y)]^2 - 3 = 3(4 + 4) -2[-0{,}5 \times 2 \times 3 + (-2) \times 4] + 9 + 16 - 3 = 24 + 22 + 25 - 3 = 68$

Příklad

Náhodná veličina X udává počet ok při hodu kostkou. NV Y = 2+ 3X. Vypočtěte:

a) E(X) a D(X),
b) E(Y) a D(Y),
c) C(X,Y),
d) R(X,Y).

Řešení: a) $E(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = 3{,}5$ $\qquad D(X) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 - E(X)^2 = \frac{91}{6} - 3{,}5^2 = 2{,}9167$

b) $E(Y) = E(2+3X) = 2 + 3E(X) = 2 + 3\cdot 3{,}5 = 12{,}5$

$D(Y) = D(2+3X) = 3^2 D(X) = 9\cdot 2{,}9167 = 26{,}25$

c) $C(X,Y) = C(X,2+3X) = 3C(X,X) = 3D(X) = 3\cdot 2{,}9167 = 8{,}7501$

d) $R(X,Y) = R(X,2+3X) = \mathrm{sgn}(3)R(X,X) = 1\cdot 1 = 1$

Příklad

Náhodná veličina X udává součet počtu ok při hodu 2-mi kostkami. Vypočtěte E(X).

Řešení: X_i … počet ok při i-tém hodu, i = 1,…,6

$$E(X_i) = 3{,}5$$

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{2} X_i\right) = \sum_{i=1}^{2} E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{2} 3{,}5 = 7$$

Nebo:

součet	počet možností	možnosti
2	1	11
3	2	12 21
4	3	22 13 31
5	4	23 32 41 14
6	5	33 24 42 51 15
7	6	34 43 25 52 16 61
8	5	44 35 53 26 62
9	4	54 45 36 63
10	3	55 64 46
11	2	56 65
12	1	66
Celkem	**36**	

$$E(X) = \sum_{x=2}^{12} x\pi(x) = \frac{1}{42}(2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5$$

$$+ 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 9\cdot 4 + 10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1) = \frac{252}{36} = 7$$

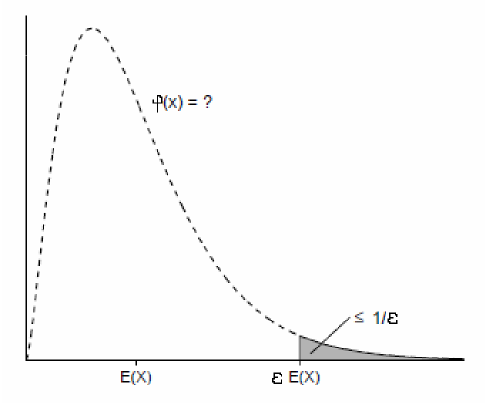
Markovova nerovnost

13.4. Věta (Markovova nerovnost):

Nechť pro náhodnou veličinu X se střední hodnotou E(X) platí P(X> 0) = 1. Pak platí Markovova nerovnost:

$\forall \varepsilon > 0: \boxed{P(X > \varepsilon E(X)) \leq \frac{1}{\varepsilon}}.$

Ilustrace pro spojitý případ:



Důkaz: Pro spojitý případ:

$$E(X) = \int_0^\infty x\varphi(x)dx \geq \int_{\varepsilon E(X)}^\infty x\varphi(x)dx \geq \int_{\varepsilon E(X)}^\infty \varepsilon E(X)\varphi(x)dx = \varepsilon E(X) \int_{\varepsilon E(X)}^\infty \varphi(x)dx = \varepsilon E(X) P(X > \varepsilon E(X))$$

$$\Rightarrow P(X > \varepsilon E(X)) \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Příklad

13.5. Příklad:

Nechť $P(X > 0) = 1$ a $E(X) = \delta$, kde $\delta > 0$ je konstanta.

a) Odhadněte $P(X > 3\delta)$.

b) Nechť $X \sim Ex\left(\frac{1}{\delta}\right)$. Vypočtěte $P(X > 3\delta)$.

Řešení:

ad a) $P(X > 3\delta) \leq \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$

ad b) $X \sim Ex\left(\frac{1}{\delta}\right) \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \text{pro } x > 0 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, $E(X) = \delta, P(X > 3\delta) = \int_{3\delta}^{\infty} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x}{\delta}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{\delta}}\right]_{3\delta}^{\infty} = e^{-3} = 0,04975$

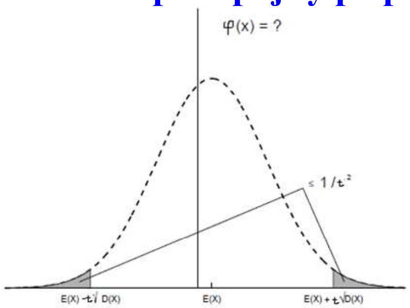
Čebyševova nerovnost

13.6. Věta (Čebyševova nerovnost):

Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu E(X) a rozptyl D(X). Pak platí Čebyševova nerovnost:

$$\boxed{\forall t > 0 : P\left(\left|X - E(X)\right| > t\sqrt{D(X)}\right) \le \frac{1}{t^2}.}$$

Ilustrace pro spojitý případ



Důkaz: Pro spojitý případ: Plyne z Markovovy nerovnosti, kde položíme $Y = [X - E(X)]^2$. Pak $P(Y > 0) = 1$ a pro $\forall \varepsilon > 0 : P(Y > \varepsilon E(Y)) \le \frac{1}{\varepsilon}$, tj. pro $\forall \varepsilon > 0 : P\left([X - E(X)]^2 > \varepsilon E\left([X - E(X)]^2\right)\right) \le \frac{1}{\varepsilon}$. Položme $\varepsilon = t^2$. Po odmocnění máme

$$\forall t > 0 : P\left(\left|X - E(X)\right| > t\sqrt{D(X)}\right) \le \frac{1}{t^2}.$$

Příklad

13.7. Příklad: Nechť E(X) = μ, D(X) = σ^2.
a) Odhadněte $P\left(|X-\mu| > 3\sigma\right)$.
b) Jestliže X ~ N(μ, σ^2), vypočtěte $P\left(|X-\mu| > 3\sigma\right)$.

Řešení:

ad a) $P\left(|X-\mu| > 3\sigma\right) \le \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,\bar{1}$.

(Tomuto výsledku se říká pravidlo 3σ a říká, že nejvýše 11,1% realizací náhodné veličiny leží vně intervalu (μ - 3σ, μ + 3σ).)

ad b) $P\left(|X-\mu| > 3\sigma\right) = 1 - P(-3\sigma \le X - \mu \le 3\sigma) = 1 - P(-3 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 3) = 1 - \Phi(3) + \Phi(-3) = 2[1 - \Phi(3)] = 2(1 - 0,99865) =$ 0,0027. (Má-li náhodná veličina normální rozložení, pak pouze 0,27% realizací leží vně intervalu (μ - 3σ, μ + 3σ).)

Cauchy – Schwarzova - Buňakovského nerovnost

13.8. Věta (Cauchyova – Schwarzova – Buňakovského nerovnost):
Nechť $R(X_1, X_2)$ je koeficient korelace náhodných veličin X_1, X_2. Pak $\boxed{|R(X_1,X_2)| \le 1}$ a rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když mezi veličinami X_1, X_2 existuje s pravděpodobností 1 úplná lineární závislost, tj. existují konstanty a, b tak, že $P(X_2 = a + bX_1) = 1$.

Důkaz: Zavedeme standardizované náhodné veličiny $U_i = \dfrac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{D(X_i)}}$, i = 1, 2.

$$0 \le D(U_1 \pm U_2) = D(U_1) \pm 2C(U_1, U_2) + D(U_2) = 2[1 \pm R(X_1, X_2)] \Rightarrow |R(X_1, X_2)| \le 1.$$

Předpokládejme nejprve, že $R(X_1, X_2) = 1$. V tomto případě počítáme $D(U_1 - U_2) = 2[1 - R(X_1, X_2)] = 0$. To je možné jen tak, že

$P(U_1 = U_2) = 1$, tj. $P(U_1 - U_2 = 0) = 1$, tj. $1 = P\left(\dfrac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{D(X_1)}} = \dfrac{X_2 - E(X_2)}{\sqrt{D(X_2)}}\right) = P\left(X_2 = E(X_2) - \dfrac{\sqrt{D(X_2)}}{\sqrt{D(X_1)}}E(X_1) + \dfrac{\sqrt{D(X_2)}}{\sqrt{D(X_1)}}X_1\right)$, tudíž

$$a = E(X_2) - \frac{\sqrt{D(X_2)}}{\sqrt{D(X_1)}}E(X_1),\ b = \frac{\sqrt{D(X_2)}}{\sqrt{D(X_1)}}.$$

Předpokládáme-li, že $R(X_1, X_2) = -1$, pak počítáme $D(U_1 + U_2)$.

Nechť naopak $P(X_2 = a + bX_1) = 1$. Pak $R(X_1, X_2) = R(X_1, a + bX_1) = \operatorname{sgn}(b) R(X_1, X_1) = \operatorname{sgn}(b) = \begin{cases} 1 \text{ pro } b > 0 \\ -1 \text{ pro } b < 0 \end{cases}$.