Slabý zákon velkých čísel a centrální limitní věta

S rostoucím počtem opakovaných nezávislých pokusů zjišťujeme, že empirické charakteristiky, které popisují výsledky těchto pokusů, se blíží teoretickým charakteristikám. Například relativní četnost úspěchu se blíží pravděpodobnosti úspěchu; průměr měření zatížených náhodnou chybou se blíží hledané neznámé střední hodnotě; empirická distribuční funkce se blíží distribuční funkci. Těmito skutečnostmi se zabývá Slabý zákon velkých čísel, specifikovaný např. Čebyševovou větou, nebo Bernoulliovou větou.

Podstatou centrální limitní věty je tvrzení, že náhodná veličina X, která vznikla jako součet velkého počtu vzájemně nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ má za velmi obecných podmínek přibližně normální rozdělení. Nejjednodušší specifikací centrální limitní věty je Moivre-Laplaceova věta. Zobecněním Moivre-Laplaceovy věty je věta Lindbergova-Lévyova. Nejobecněji centrální limitní větu formuloval Ljapunov, jeho větu však nebudeme uvádět. V současné době, kdy databáze mají ohromné množství položek, je aplikace CLV nesmírně užitečná.

Při uvedení zmíněných vět se neobejdeme bez pojmu konvergence posloupnosti náhodných veličin. V počtu pravděpodobnosti se nabízí řada způsobů, jak konvergenci posloupnosti náhodných veličin definovat, my si uvedeme následující tři.

Typy konvergence posloupnosti NV

Definice 2.1
Říkáme, že náhodná posloupnost $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ konverguje k náhodné veličině X

(i.) *jistě*, právě když všechny realizace náhodné posloupnosti $(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega), \ldots)$ konvergují k realizaci náhodné veličiny $X(\omega)$. Tedy platí:

$$\forall \omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$

[Jedná se o "obyčejnou" konvergenci číselné posloupnosti]

(ii.) *podle pravděpodobnosti*, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leq \varepsilon) = 1$$

[Při vzrůstajícím počtu pokusů jsou větší odchylky X_n od X krajně nepravděpodobné]

(iii.) *v distribuci*, právě když pro distribuční funkce $F_1(x_1) \sim X_1, \ldots, F_n(x_n) \sim X_n, \ldots$, popř. $F(x) \sim X$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \text{ pro všechna } x, \text{ kde je funkce } F \text{ spojitá}$$

[Jedná se o nejslabší z uvedených typů konvergence, definuje se jen s užitím distribučních funkcí]

Typy konvergence posloupnosti NV

Poznámka 2.2
Náhodná posloupnost $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ může konvergovat i ke konstantě, což je v předchozí definici zahrnuto. Stačí uvažovat náhodnou veličinu X degenerovanou.

Věta 2.3
Nechť $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ je náhodná posloupnost.

1. Jestliže tato náhodná posloupnost konverguje k náh. vel. X jistě, pak k ní nutně konverguje i podle pravděpodobnosti. Konverguje-li k X podle pravděpodobnosti, pak k ní nutně konverguje i v distribuci. [Obrácené implikace obecně neplatí.]

2. K tomu, aby náhodná posloupnost $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ konvergovala podle pravděpodobnosti k číslu μ, stačí splnění podmínek

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = \mu \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} D(X_n) = 0$$

Slabý zákon velkých čísel – Čebyševova věta

Věta2.4 Čebyševova (slabý zákon velkých čísel)
Nechť náhodná posloupnost $(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ je posloupnost stochasticky nezávislých a stejně rozložených náhodných veličin se stejnou střední hodnotou μ a stejným rozptylem σ^2. Potom náhodná posloupnost aritmetických průměrů $(X_1, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} X_i, \ldots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ldots)$ konverguje podle pravděpodobnosti ke střední hodnotě μ. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| < \varepsilon) = 1$$

[Při velkém počtu nezávislých pokusů můžeme téměř jistě očekávat, že aritmetický průměr jednotlivých pokusů se bude od střední hodnoty μ lišit krajně nepatrně. Proto při dostatečně velkém n lze střední hodnotu μ odhadnout průměrem výsledků jednotlivých pokusů.]

Bernoulliova věta

Věta2.5 Bernoulliova (důsledek Čebyševovy věty)
Nechť náhodná veličina Y_n udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, kdy úspěch nastává v každém pokusu s pravděpodobností ϑ, $0 < \vartheta < 1$. Pak posloupnost relativních četností $(Y_1, \frac{Y_2}{2}, \dots \frac{Y_n}{n}, \dots)$ konverguje podle pravděpodobnosti k pravděpodobnosti úspěchu ϑ. Tedy pro každé $\varepsilon > 0$ platí:

$$P(|\frac{Y_n}{n} - \vartheta| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n\varepsilon^2}$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{Y_n}{n} - \vartheta| < \varepsilon) = 1$$

Příklad

Příklad 2.6

Pravděpodobnost vyrobení zmetku je $\frac{12}{3000}$. Při výstupní kontrole bylo testováno 3000 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že relativní četnost výskytu zmetků se od pravděpodobnosti výskytu zmetku liší nejvýše o 0,01?

Řešení

Označme Y_{3000} náhodnou veličinu udávající počet zmetků (úspěchů) v 3000 pokusech.
Potom $Y_{3000} \sim Bi(3000, \frac{12}{3000})$

Relativní četnost úspěchů by se s rostoucím n měla blížit k pravděpodobnosti úspěchu. My chceme určit pravděpodobnost, že pro $n = 3000$ se relativní četnost úspěchů od pravděpodobnosti úspěchu neodchýlí o více, než o 0,01. Tedy v Bernoulliove větě budeme za ε volit 0,01.

Pro každé $\varepsilon > 0$ platí: $P(|\frac{Y_n}{n} - \vartheta| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n\varepsilon^2}$.
Tedy $P(|\frac{Y_{3000}}{3000} - \frac{12}{3000}| < 0,01) \geq 1 - \frac{\frac{12}{3000}(1-\frac{12}{3000})}{3000 \cdot 0,01^2} \doteq 0,872$

Pokud bychom chtěli využít přímo Čebyševovu větu, pak bychom za X_i volili náhodnou veličinu s alternativním rozložením, kde jednička symbolizuje vyrobení zmetku (úspěch) a nula vyrobení kvalitního výrobku.
Tedy $X_i \sim A(\frac{12}{3000})$, $i = 1, \ldots, 3000$ $\quad E(X_i) = \frac{12}{3000}$ $\quad D(X_i) = \frac{12}{3000}(1 - \frac{12}{3000})$; $X_1, \ldots, X_{3000}$ jsou stoch. nezávislé. Dále stačí za ε volit 0,01 a dosadit do Čebyševovy věty. (Uvědomte si, že binomická náhodná veličina vzniká jako součet nezávislých, stejně rozložených alternativních náhodných veličin.)

Centrální limitní věta

Věta2.7 Lindbergova-Lévyova (centrální limitní věta)
Nechť náhodná posloupnost $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ je posloupnost stochasticky nezávislých a stejně rozložených náhodných veličin se stejnou střední hodnotou μ a stejným rozptylem σ^2. Uvažme součet $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ a odvoďme střední hodnotu a rozptyl nové náhodné veličiny X.

$E(X) = E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu = n\mu$

$D(X) = D(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$

Nyní uvažme standardizovaný součet $U_n = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ [n můžeme libovolně zvětšovat]

Potom náhodná posloupnost standardizovaných součtů $(U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots)$ konverguje v distribuci k náhodné veličině $U \sim N(0, 1)$. Tedy

$$\forall u \in \mathrm{R}: \quad \lim_{n \to \infty} P(U_n \le u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0, 1)$ a říkáme, že U_n se asymptoticky řídí normálním standardizovaným rozložením. [Všimněte si, že $U_n = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. Centrální limitní věta tedy tvrdí, že s rostoucím n se distribuční funkce průměrů náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$ blíží distribuční funkci normálního rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$. Toto nastává bez ohledu na původní rozložení náhodné veličiny X.]

Moivre – Laplaceova věta

Věta2.8 Moivre-Laplaceova (důsledek Lindbergovy-Lévyovy věty)
Nechť $Y_n \sim Bi(n, \vartheta)$, $n = 1, 2, \ldots$. Potom $E(Y_n) = n\vartheta \quad D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$.
a $U_n = \frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}} \approx N(0,1)$

[Moivre-Laplaceova věta říká, že při dostatečně velkém počtu nezávislých pokusů konverguje v distribuci binomické rozdělení k normálnímu.]

Poznámka 2.9
Na základě Moivre-Laplaceova věty se používá přibližný vzorec, který nahrazuje pracný výpočet distribuční funkce binomického rozložení jednoduchým hledáním v tabulkách distribuční funkce normálního standardizovaného rozložení. Porovnejte

Přesný výpočet:

$P(Y_n \leq y) = \sum_{t=0}^{y} \binom{n}{t} \vartheta^t (1-\vartheta)^{n-t}$ … náročná sumace

Aproximace normálním rozložením:

$P(Y_n \leq y) = P\left(\frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}} \leq \frac{y - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}\right) \sim N(0,1)$,

kde $\Phi(u)$ je tabelovaná distribuční funkce standardizovaného normálního rozložení.

Aproximaci je vhodné použít pokud jsou splněny následující podmínky:
$n\vartheta(1-\vartheta) > 9 \quad \wedge \quad \frac{1}{n+1} < \vartheta < \frac{n}{n+1}$.

Příklad

V určité skupině zaměstnanců je 10% s příjmem, který překračuje celostátní průměr. Kolik zaměstnanců z této skupiny je třeba vybrat, aby s pravděpodobností aspoň 0,95 bylo mezi nimi 8% až 12% zaměstnanců s nadprůměrným příjmem?

Řešení:

X – počet zaměstnanců s nadprůměrným příjmem, X ~ Bi(n, 0,1), E(X) = 0,1n, D(X) = 0,09n,

$$0{,}95 \le P\left(0{,}08 \le \frac{X}{n} \le 0{,}12\right) = P(0{,}08n \le X \le 0{,}12n) = P\left(\frac{0{,}08n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \le \frac{X - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \le \frac{0{,}12n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) =$$

$$P\left(\frac{-\sqrt{n}}{15} \le \frac{X - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}} \le \frac{\sqrt{n}}{15}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{15}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) - 1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{15}\right) \ge 0{,}975,$$

tedy $\frac{\sqrt{n}}{15} \ge u_{0{,}975} = 1{,}96 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 29{,}4 \Rightarrow n \ge 865.$

Příklad

Příklad 2.10

100-krát nezávisle na sobě házíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne aspoň 20-krát?

Řešení

Označme Y_{100} náhodnou veličinu, udávající počet padnutých šestek ve 100 hodech, $Y_{100} \sim Bi(100, \frac{1}{6})$.
Nejdříve ověříme podmínky pro použití aproximace normálním rozložením:
$n\vartheta(1-\vartheta) = 100 \cdot \frac{1}{6}(1-\frac{1}{6}) = \frac{500}{36} > 9 \quad \wedge \quad \frac{1}{101} < \frac{1}{6} < \frac{100}{101}$, tedy obě podmínky jsou splněny.
Hledanou pravděpodobnost odhadneme pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

$$P(Y_{100} \geq 20) = 1 - P(Y_{100} < 20) = P(Y_{100} \leq 19) = 1 - P\left(\frac{Y_{100} - 100/6}{\sqrt{100 \cdot 1/6 \cdot 5/6}} \leq \frac{19 - 100/6}{\sqrt{100 \cdot 1/6 \cdot 5/6}}\right) =$$
$$1 - P(U_n \leq 0,626) \approx 1 - \Phi(0,626) = 1 - 0,73565 = 0,2635.$$

(Přesný výpočet pomocí softwaru by vyšel 0,2198.)

Aproximace binomického rozložení normálním rozložením nemusí být vždy nejvhodnější. Pro extrémně malé pravděpodobnosti úspěchu ϑ užíváme přibližný vzorec, který vychází z Poissonovy věty.

Poissonova věta

Věta2.11 Poissonova

Nechť $Y_1, Y_2, \ldots$ je posloupnost stochasticky nezávislých náhodných veličin, $Y_n \sim Bi(n, \vartheta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} n\vartheta_n = \lambda$. Pak posloupnost $Y_1, Y_2, \ldots Y_n, \ldots$ konverguje v distribuci k náhodné veličině $Y \sim Po(\lambda)$, tedy $Y_n \approx Po(\lambda)$.

[Náhodná veličina Y má Poissonovo rozložení s parametrem λ, náhodnou veličinu Y_n s binomickým rozložením lze aproximovat Poissonovýn rozložením.]

Poznámka 2.12

Na základě Poissonovy věty se používá přibližný vzorec, který nahrazuje pracný výpočet

Příklad

Poznámka 2.12
Na základě Poissonovy věty se používá přibližný vzorec, který nahrazuje pracný výpočet distribuční (resp. pravděpodobnostní) funkce binomického rozložení jednoduchým hledáním v tabulkách distribuční (resp. pravděpodobnostní) funkce Poissonova rozložení.

• $P(Y_n \leq y) = \sum\limits_{t=0}^{y} \binom{n}{t} \vartheta^t (1-\vartheta)^{n-t} \approx F_{n\vartheta}(y) \sim Po(n\vartheta)$, kde $F_{n\vartheta}(y)$ je distribuční funkce Poissonova rozložení s parametrem $\lambda = n\vartheta$
• $P(Y_n = y) = \binom{n}{y} \vartheta^y (1-\vartheta)^{n-y} \approx \frac{(n\vartheta)^y}{y!} e^{-n\vartheta}$ (Srovnej s pravděpodobnostní funkcí Poissonova rozložení, která je tabelovaná.)
Aproximaci je vhodné použít, pokud jsou splněny následující podmínky:
$n \geq 30 \wedge \vartheta \leq 0,1.$

Příklad

Příklad 2.13

Během zkoušky spolehlivosti se přístroj porouchá s pravděpodobností 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že při zkoušení 100 přístrojů se jich porouchá právě 5?

Řešení

Označme Y_{100} náhodnou veličinu, udávající počet porouchaných přístrojů ve 100 zkouškách, $Y_{100} \sim Bi(100; 0,05)$.

Nejdříve ověříme podmínky pro použití aproximace Poissonovým rozložením:

$100 \geq 30 \quad \wedge \quad 0.05 \leq 0,1.$

<u>Určení hledané pravděpodobnosti aproximací Poissonovým rozložením:</u>

$P(Y_{100} = 5) \approx \frac{(100 \cdot 0,5)^5}{5!} e^{-100 \cdot 0,05}$, což nemusíme počítat, jelikož jde o pravděpodobnostní funkci Poissonova rozložení v bodě 5 s parametrem $\lambda = 100 \cdot 0,05$, která je v tabulkách.

Tedy $p_5(5) = 0,17547$

<u>Určení hledané pravděpodobnosti přesným výpočtem:</u>

$P(Y_{100} = 5) = \binom{100}{5} 0,05^5 (1 - 0,05)^{95} = \ldots = 0,18$

Pravděpodobnostní funkce binomického rozložení Bi(n,p) 1.část

		p												
n	x	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0225	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1225	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	.1406	.1850	.2222	.2389	.2880	.3341	.3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.0988	.1125	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0283	.0312

Pravděpodobnostní funkce binomického rozložení Bi(n,p) 2.část

		p												
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0425	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3171	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039

Pravděpodobnostní funkce binomického rozložení Bi(n,p) 3.část

		p												
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0569	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozložení Po(λ) 1.část

	λ									
x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
6	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0005
7	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1804
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0062	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0012	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034
8	0000	0000	0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0002

Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozložení Po(λ) 2.část

	λ									
x	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
0	0,0498	0183	0067	0025	0009	0003	0001	0000	0000	0000
1	1494	0733	0337	0149	0064	0027	0011	0005	0002	0001
2	2240	1465	0842	0446	0223	0107	0050	0023	0010	0004
3	2240	1954	1404	0892	0521	0286	0150	0076	0037	0018
4	1680	1954	1755	1339	0912	0573	0337	0189	0102	0053
5	1008	1563	1755	1606	1277	0916	0607	0378	0224	0127
6	0504	1042	1462	1606	1490	1221	0911	0631	0411	0255
7	0216	0595	1044	1377	1490	1396	1171	0901	0646	0437
8	0081	0298	0653	1033	1304	1396	1318	1126	0888	0655
9	0027	0132	0363	0688	1014	1241	1318	1251	1085	0874
10	0008	0053	0181	0413	0710	0993	1186	1251	1194	1048
11	0002	0019	0082	0225	0452	0722	0970	1137	1194	1144
12	0002	0006	0034	0113	0264	0481	0728	0948	1094	1144
13		0002	0013	0052	0142	0296	0504	0729	0926	1056
14		0001	0005	0022	0071	0169	0324	0521	0728	0905
15			0002	0009	0033	0090	0194	0347	0534	0724
16				0003	0014	0045	0109	0217	0367	0543
17				0001	0006	0021	0058	0128	0237	0383
18					0002	0009	0029	0071	0145	0256
19					0001	0004	0014	0037	0084	0161
20						0002	0006	0019	0046	0097
21						0001	0003	0009	0024	0055
22							0001	0004	0012	0030
23								0002	0006	0016
24								0001	0003	0008
25									0001	0004
26										0002

Distribuční funkce Φ(u) rozložení N(0,1)

	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)
0,00	0,50000	0,40	0,65542	0,80	0,78814	1,20	0,88493
0,01	0,50399	0,41	0,65910	0,81	0,79103	1,21	0,88686
0,02	0,50798	0,42	0,66276	0,82	0,79389	1,22	0,88877
0,03	0,51197	0,43	0,66640	0,83	0,79673	1,23	0,89065
0,04	0,51595	0,44	0,67003	0,84	0,79955	1,24	0,89251
0,05	0,51994	0,45	0,67364	0,85	0,80234	1,25	0,79435
0,06	0,52392	0,46	0,67724	0,86	0,80511	1,26	0,89617
0,07	0,52790	0,47	0,68082	0,87	0,80785	1,27	0,89796
0,08	0,53188	0,48	0,68439	0,88	0,81057	1,28	0,89973
0,09	0,53586	0,49	0,68793	0,89	0,81327	1,29	0,90147
0,10	0,53983	0,50	0,69146	0,90	0,81594	1,30	0,90320
0,11	0,54380	0,51	0,69497	0,91	0,81859	1,31	0,90490
0,12	0,54776	0,52	0,69847	0,92	0,82121	1,32	0,90658
0,13	0,55172	0,53	0,70194	0,93	0,82381	1,33	0,90824
0,14	0,55567	0,54	0,70540	0,94	0,82639	1,34	0,90988
0,15	0,55962	0,55	0,70884	0,95	0,82894	1,35	0,91149
0,16	0,56356	0,56	0,71226	0,96	0,83147	1,36	0,91309
0,17	0,56749	0,57	0,71655	0,97	0,83398	1,37	0,91466
0,18	0,57142	0,58	0,71904	0,98	0,83646	1,38	0,91621
0,19	0,57535	0,59	0,72240	0,99	0,83891	1,39	0,91774
0,20	0,57926	0,60	0,72575	1,00	0,84134	1,40	0,91924
0,21	0,58317	0,61	0,72907	1,01	0,84375	1,41	0,92073
0,22	0,58706	0,62	0,73237	1,02	0,84614	1,42	0,92220
0,23	0,59095	0,63	0,73565	1,03	0,84850	1,43	0,92364
0,24	0,59483	0,64	0,73891	1,04	0,85083	1,44	0,92507
0,25	0,59871	0,65	0,74215	1,05	0,85314	1,45	0,92647
0,26	0,60257	0,66	0,74537	1,06	0,85543	1,46	0,92786
0,27	0,60642	0,67	0,74857	1,07	0,85769	1,47	0,92922
0,28	0,61026	0,68	0,75175	1,08	0,85993	1,48	0,93056
0,29	0,61409	0,69	0,75490	1,09	0,86214	1,49	0,93189
0,30	0,61791	0,70	0,75804	1,10	0,86433	1,50	0,93319
0,31	0,62172	0,71	0,76115	1,11	0,86650	1,51	0,93448
0,32	0,62552	0,72	0,76424	1,12	0,86864	1,52	0,93574
0,33	0,62930	0,73	0,76730	1,13	0,87076	1,53	0,93699
0,34	0,63307	0,74	0,77035	1,14	0,87286	1,54	0,93822
0,35	0,63683	0,75	0,77337	1,15	0,87493	1,55	0,93943
0,36	0,64058	0,76	0,77637	1,16	0,87698	1,56	0,94062
0,37	0,64431	0,77	0,77935	1,17	0,87900	1,57	0,94179
0,38	0,64803	0,78	0,78230	1,18	0,88100	1,58	0,94295
0,39	0,65173	0,79	0,78524	1,19	0,88298	1,59	0,94408

u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)	u	Φ(u)
1,60	0,94520	2,00	0,97725	2,40	0,99180	3,10	0,99903
1,61	0,94630	2,01	0,97778	2,41	0,99202	3,12	0,99910
1,62	0,94738	2,02	0,97831	2,42	0,99224	3,14	0,99916
1,63	0,94845	2,03	0,97882	2,43	0,99245	3,16	0,99921
1,64	0,94950	2,04	0,97932	2,44	0,99266	3,18	0,99926
1,65	0,95053	2,05	0,97982	2,45	0,99286	3,20	0,99931
1,66	0,95154	2,06	0,98030	2,46	0,99305	3,22	0,99936
1,67	0,95254	2,07	0,98077	2,47	0,99324	3,24	0,99940
1,68	0,95352	2,08	0,98124	2,48	0,99343	3,26	0,99944
1,69	0,95449	2,09	0,98169	2,49	0,99361	3,28	0,99948
1,70	0,95543	2,10	0,98214	2,50	0,99379	3,30	0,99952
1,71	0,95637	2,11	0,98257	2,52	0,99413	3,32	0,99955
1,72	0,95728	2,12	0,98300	2,54	0,99446	3,34	0,99958
1,73	0,95818	2,13	0,98341	2,56	0,99477	3,36	0,99961
1,74	0,95907	2,14	0,98382	2,58	0,99506	3,38	0,99964
1,75	0,95994	2,15	0,98422	2,60	0,99534	3,40	0,99966
1,76	0,96080	2,16	0,98461	2,62	0,99560	3,42	0,99969
1,77	0,96164	2,17	0,98500	2,64	0,99585	3,44	0,99971
1,78	0,96246	2,18	0,98537	2,66	0,99609	3,46	0,99973
1,79	0,96327	2,19	0,98574	2,68	0,99632	3,48	0,99975
1,80	0,96407	2,20	0,98610	2,70	0,99653	3,50	0,99977
1,81	0,96485	2,21	0,98645	2,72	0,99674	3,55	0,99981
1,82	0,96562	2,22	0,98679	2,74	0,99683	3,60	0,99984
1,83	0,96638	2,23	0,98713	2,76	0,99711	3,65	0,99987
1,84	0,96712	2,24	0,98745	2,78	0,99728	3,70	0,99989
1,85	0,96784	2,25	0,98778	2,80	0,99744	3,72	0,99991
1,86	0,96856	2,26	0,98809	2,82	0,99760	3,80	0,99993
1,87	0,96926	2,27	0,98840	2,84	0,99774	3,85	0,99994
1,88	0,96995	2,28	0,98870	2,86	0,99788	3,90	0,99995
1,89	0,97062	2,29	0,98899	2,88	0,99801	3,95	0,99996
1,90	0,97128	2,30	0,98928	2,90	0,99813	4,00	0,99997
1,91	0,97193	2,31	0,98956	2,92	0,99825	4,05	0,99997
1,92	0,97257	2,32	0,98983	2,94	0,99836	4,10	0,99998
1,93	0,97320	2,33	0,99010	2,96	0,99846	4,15	0,99998
1,94	0,97381	2,34	0,99036	2,98	0,99856	4,20	0,99999
1,95	0,97441	2,35	0,99061	3,00	0,99865	4,25	0,99999
1,96	0,97500	2,36	0,99086	3,02	0,99874	4,30	0,99999
1,97	0,97558	2,37	0,99111	3,04	0,99882	4,35	0,99999
1,98	0,97615	2,38	0,99134	3,06	0,99889	4,40	0,99999
1,99	0,97670	2,39	0,99158	3,08	0,99897	4,45	1,00000

Kvantily standardizovaného normálního rozložení u_P

P	u_P	P	u_P	P	u_P	P	u_P
0,50	0,000	0,75	0,674	0,950	1,645	0,975	1,960
0,51	0,025	0,76	0,706	0,951	1,655	0,976	1,970
0,52	0,050	0,77	0,739	0,952	1,665	0,977	1,995
0,53	0,075	0,78	0,772	0,953	1,675	0,978	2,014
0,54	0,100	0,79	0,806	0,954	1,685	0,979	2,034
0,55	0,126	0,80	0,842	0,955	1,695	0,980	2,054
0,56	0,151	0,81	0,878	0,956	1,706	0,981	2,075
0,57	0,176	0,82	0,915	0,957	1,717	0,982	2,097
0,58	0,202	0,83	0,954	0,958	1,728	0,983	2,120
0,59	0,228	0,84	0,994	0,959	1,739	0,984	2,144
0,60	0,253	0,85	1,036	0,960	1,751	0,985	2,170
0,61	0,279	0,86	1,080	0,961	1,762	0,986	2,197
0,62	0,305	0,87	1,126	0,962	1,774	0,987	2,226
0,63	0,332	0,88	1,175	0,963	1,787	0,988	2,257
0,64	0,358	0,89	1,227	0,964	1,799	0,989	2,290
0,65	0,385	0,90	1,282	0,965	1,812	0,990	2,326
0,66	0,412	0,905	1,311	0,966	1,825	0,991	2,366
0,67	0,440	0,910	1,341	0,967	1,838	0,992	2,409
0,68	0,468	0,915	1,372	0,968	1,852	0,993	2,457
0,69	0,496	0,920	1,405	0,969	1,866	0,994	2,512
0,70	0,524	0,925	1,440	0,970	1,881	0,995	2,576
0,71	0,553	0,930	1,476	0,971	1,896	0,996	2,652
0,72	0,583	0,935	1,514	0,972	1,911	0,997	2,748
0,73	0,613	0,940	1,555	0,973	1,927	0,998	2,878
0,74	0,643	0,945	1,598	0,974	1,943	0,999	3,090

Kvantily Pearsonova rozložení $\chi^2(\nu)$

stupně volnosti	pravděpodobnost				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107
3	0,0717	0,1148	0,2158	0,3519	0,5844
4	0,2070	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636
5	0,4117	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103
6	0,6757	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041
7	0,9893	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331
8	1,3444	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895
9	1,7349	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682
10	2,1559	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652
11	2,6032	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778
12	3,0738	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038
13	3,5650	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415
14	4,0747	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895
15	4,6009	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468
16	5,1422	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122
17	5,6972	6,4078	7,5642	8,6718	10,085
18	6,2648	7,0149	8,2307	9,3905	10,865
19	6,8440	7,6327	8,9065	10,117	11,651
20	7,4338	8,2604	9,5908	10,851	12,443
21	8,0337	8,8972	10,283	11,591	13,240
22	8,6427	9,5425	10,982	12,338	14,041
23	9,2604	10,196	11,689	13,091	14,848
24	9,8862	10,856	12,401	13,848	15,659
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292
27	11,808	12,879	14,573	16,151	18,114
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358
200	152,24	156,43	162,73	168,28	174,84
300	240,66	245,97	253,91	260,88	269,07
500	422,30	429,39	439,94	449,15	459,93

stupně volnosti	pravděpodobnost				
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	6,251	7,814	9,348	11,345	12,838
4	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	9,236	11,070	12,833	15,086	16,750
6	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	22,307	27,996	27,488	30,578	32,801
16	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	33,196	36,415	39,364	42,980	45,599
25	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	37,916	41,337	44,461	48,278	50,993
29	39,087	42,557	45,722	49,588	52,336
30	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490
60	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952
70	85,527	90,531	95,023	100,43	104,21
80	96,578	101,88	106,63	112,33	116,32
90	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17
200	226,02	233,99	241,06	249,45	255,26
300	331,79	341,40	349,87	359,91	366,84
500	540,93	553,13	563,85	576,49	585,21

Kvantily Studentova rozložení t(n)

stupně volnosti	pravděpodobnost				
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,303	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,961
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,878
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Kvantily rozložení $F_{0,95}(\nu_1,\nu_2)$ -1.část

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,014	8,941	8,887	8,845	8,812
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999
5	6,608	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,773
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,501	3,438	3,388
9	5,117	4,257	3,863	3,633	3,482	2,274	3,293	3,230	3,179
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,136	3,072	3,020
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,791	2,707	2,641	2,588
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393
21	4,325	3,467	3,073	2,840	2,685	2,573	2,488	2,421	2,366
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,266
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,450	2,336	2,249	2,180	2,124
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959
∞	3,842	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,880

Kvantily rozložení $F_{0,95}(\nu_1,\nu_2)$ -2.část

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241´,88	243,91	245,95	248,01	249,05	250,09	251,14	252,20	253,25	254,32
2	19,396	19,413	19,429	19,446	19,454	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	8,786	8,745	8,703	8,660	8,639	8,617	8,594	8,572	8,549	8,527
4	5,964	5,912	5,858	5,803	5,774	5,746	5,717	5,688	5,658	5,628
5	4,735	4,678	4,619	4,558	4,527	4,496	4,464	4,431	4,398	4,365
6	4,060	4,000	3,938	3,874	3,842	3,808	3,774	3,740	3,705	3,669
7	3,637	3,575	3,511	3,445	3,411	3,376	3,340	3,304	3,267	3,230
8	3,347	3,284	3,218	3,150	3,115	3,079	3,043	3,005	2,967	2,928
9	3,137	3,073	3,006	2,937	2,901	2,864	2,826	2,787	2,748	2,707
10	2,978	2,913	2,845	2,774	2,737	2,700	2,661	2,621	2,580	2,538
11	2,854	2,788	2,719	2,646	2,609	2,571	2,531	2,490	2,448	2,405
12	2,753	2,687	2,617	2,544	2,506	2,466	2,426	2,384	2,341	2,296
13	2,671	2,604	2,533	2,459	2,420	2,380	2,339	2,297	2,252	2,206
14	2,602	2,534	2,463	2,388	2,349	2,308	2,266	2,223	2,178	2,131
15	2,544	2,475	2,404	2,328	2,288	2,247	2,204	2,160	2,114	2,066
16	2,494	2,425	2,352	2,276	2,235	2,194	2,151	2,106	2,059	2,010
17	2,450	2,381	2,308	2,230	2,190	2,148	2,104	2,058	2,011	1,960
18	2,412	2,342	2,269	2,191	2,150	2,107	2,063	2,017	1,968	1,917
19	2,378	2,308	2,234	2,156	2,114	2,071	2,026	1,980	1,930	1,878
20	2,348	2,278	2,203	2,124	2,083	2,039	1,994	1,946	1,896	1,843
21	2,321	2,250	2,176	2,096	2,054	2,010	1,965	1,917	1,866	1,812
22	2,297	2,226	2,151	2,071	2,028	1,984	1,938	1,890	1,838	1,783
23	2,275	2,204	2,128	2,048	2,005	1,961	1,914	1,865	1,813	1,757
24	2,255	2,183	2,108	2,027	1,984	1,939	1,892	1,842	1,790	1,733
25	2,237	2,165	2,089	2,008	1,964	1,919	1,872	1,822	1,768	1,711
26	2,220	2,148	2,072	1,990	1,946	1,901	1,853	1,803	1,749	1,691
27	2,204	2,132	2,056	1,974	1,930	1,884	1,836	1,785	1,731	1,672
28	2,190	2,118	2,041	1,959	1,915	1,869	1,820	1,769	1,714	1,654
29	2,177	2,105	2,028	1,945	1,901	1,854	1,806	1,754	1,698	1,638
30	2,165	2,092	2,015	1,932	1,887	1,841	1,792	1,740	1,684	1,622
40	2,077	2,004	1,925	1,839	1,793	1,744	1,693	1,637	1,577	1,509
60	1,993	1,917	1,836	1,748	1,700	1,649	1,594	1,534	1,467	1,389
120	1,911	1,834	1,751	1,659	1,608	1,554	1,495	1,429	1,352	1,254
∞	1,831	1,752	1,666	1,571	1,517	1,459	1,394	1,318	1,221	1,000

Kvantily rozložení $F_{0,975}(\nu_1,\nu_2)$ -1.část

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28
2	38,506	39,000	39,165	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,387
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473
4	12,218	10,649	9,979	9,605	9,365	9,197	9,074	8,980	8,905
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,696	5,600	5,523
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823
8	7,571	6,060	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880
20	5,872	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763
23	5,750	4,349	3,751	3,408	3,184	3,023	2,902	2,808	2,731
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677
26	5,659	4,266	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,027	2,867	2,746	2,651	2,557
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222
∞	5,024	3,689	3,116	2,786	2,567	2,408	2,288	2,192	2,114

Kvantily rozložení $F_{0,975}(\nu_1,\nu_2)$ -2.část

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	968,93	976,71	984,87	993,10	997,25	1001,4	1005,6	1009,8	1014,0	1018,3
2	39,398	39,415	39,431	39,448	39,456	39,465	39,473	39,481	39,490	39,498
3	14,419	14,337	14,253	14,167	14,124	14,081	14,037	13,992	13,947	13,902
4	8,844	8,751	8,657	8,560	8,511	8,461	8,411	8,360	8,309	8,257
5	6,619	6,525	6,428	6,329	6,278	6,227	6,175	6,125	6,069	6,0115
6	5,461	5,366	5,269	5,168	5,117	5,065	5,013	4,959	4,905	4,849
7	4,761	4,666	4,568	4,467	4,415	4,362	4,309	4,256	4,199	4,142
8	4,295	4,200	4,101	4,000	3,947	3,894	3,840	3,784	3,728	3,670
9	3,964	3,868	3,769	3,667	3,614	3,560	3,506	3,449	3,392	3,333
10	3,717	3,621	3,522	3,419	3,365	3,311	3,255	3,198	3,140	3,080
11	3,526	3,430	3,330	3,226	3,173	3,118	3,061	3,004	2,944	2,883
12	3,374	3,277	3,177	3,073	3,019	2,963	2,906	2,848	2,787	2,725
13	3,250	3,153	3,053	2,948	2,893	2,837	2,7880	2,720	2,659	2,596
14	3,147	3,050	2,949	2,844	2,789	2,732	2,674	2,614	2,552	2,487
15	3,060	2,963	2,862	2,756	2,701	2,644	2,585	2,524	2,461	2,395
16	2,986	2,889	2,788	2,681	2,625	2,568	2,509	2,447	2,383	2,316
17	2,922	2,825	2,723	2,616	2,560	2,502	2,442	2,380	2,315	2,247
18	2,866	2,769	2,667	2,559	2,503	2,445	2,384	2,321	2,256	2,187
19	2,817	2,720	2,617	2,509	2,452	2,394	2,333	2,270	2,203	2,133
20	2,774	2,676	2,573	2,465	2408	2,349	2,287	2,223	2,156	2,085
21	2,735	2,637	2,534	2,425	2,368	2,308	2,247	2,182	2,114	2,042
22	2,700	2,602	2,498	2,389	2,332	2,272	2,210	2,145	2,076	2,003
23	2,668	2,570	2,467	2,357	2,299	2,239	2,176	2,111	2,042	1,968
24	2,640	2,541	2,437	2,327	2,269	2,209	2,146	2,080	2,010	1,935
25	2,614	2,515	2,411	2,301	2,242	2,182	2,118	2,052	1,981	1,906
26	2,590	2,491	2,387	2,276	2,217	2,157	2,093	2,026	1,955	1,878
27	2,568	2,469	2,364	2,253	2,195	2,133	2,069	2,002	1,930	1,853
28	2,547	2,448	2,344	2,232	2,174	2,112	2,048	1,980	1,907	1,829
29	2,529	2,430	2,325	2,213	2,154	2,092	2,028	1,959	1,886	1,807
30	2,511	2,412	2,307	2,195	2,136	2,074	2,009	1,940	1,866	1,787
40	2,388	2,288	2,182	2,068	2,007	1,943	1,875	1,803	1,724	1,637
60	2,270	2,169	2,061	1,945	1,882	1,815	1,744	1,667	1,581	1,482
120	2,157	2,055	1,945	1,825	1,760	1,690	1,614	1,530	1,433	1,310
∞	2,048	1,945	1,833	1,709	1,640	1,556	1,484	1,388	1,268	1,000

Kvantily rozložení $F_{0,99}(\nu_1,\nu_2)$ -1.část

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052,2	4999,5	5403,5	5624,6	5763,7	5859,0	5928,3	5981,6	6022,5
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,332	99,356	99,374	99,388
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,639
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993	6,840	6,719
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911
9	10,561	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4,942
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886	4,745	4,632
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,640	4,499	4,388
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,441	4,302	4,191
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,140	4,030
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,142	4,005	3,895
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,890	3,780
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,102	3,927	3,791	3,682
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,428	4,015	3,841	3,705	3,597
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,765	3,631	3,523
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457
21	8,017	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,640	3,506	3,398
22	7,945	5,719	7,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,539	3,406	3,299
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256
25	7,770	5,568	4,676	4,177	3,855	3,627	3,457	3,324	3,217
26	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388	3,256	3,149
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,120
29	7,598	5,421	4,538	4,045	3,725	3,500	3,330	3,198	3,092
30	7,563	5,390	4,510	4,018	3,699	3,474	3,305	3,173	3,067
40	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,719
120	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407

Kvantily rozložení $F_{0,99}(\nu_1,\nu_2)$ -2.část

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6055,8	6106,3	6157,3	6208,7	6234,6	6260,7	6286,8	6313,0	6339,4	6366,0
2	99,399	99,416	99,432	99,449	99,458	99,466	99,474	99,483	99,491	99,501
3	27,229	27,052	26,872	26,690	26,598	26,505	26,411	26,316	26,221	26,125
4	14,546	14,374	14,198	14,020	13,929	13,838	13,745	13,652	13,558	13,463
5	10,051	9,888	9,722	9,553	9,467	9,379	9,291	9,202	9,112	9,020
6	7,874	7,718	7,559	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,880
7	6,620	6,469	6,314	6,155	6,074	5,992	5,908	5,824	5,737	5,650
8	5,814	5,667	5,515	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
9	5,257	5,111	4,962	4,808	4,729	4,649	4,567	4,483	4,398	4,311
10	4,849	4,706	4,558	4,405	7,327	4,247	4,165	4,082	3,997	3,909
11	4,539	4,397	4,251	4,099	4,021	3,941	3,860	3,776	3,690	3,603
12	4,296	4,155	4,010	3,858	3,781	3,701	3,619	3,536	3,449	3,361
13	4,100	3,960	3,815	3,665	3,587	3,507	3,425	3,341	3,255	3,165
14	3,939	3,800	3,656	3,505	3,427	3,348	3,266	3,181	3,094	3,004
15	3,805	3,666	3,522	3,372	3,294	3,214	3,132	3,047	2,960	2,868
16	3,691	3,553	3,409	3,259	3,181	3,101	3,018	2,933	2,845	2,753
17	3,593	3,455	3,312	3,162	3,084	3,003	2,921	2,835	2,746	2,653
18	3,508	3,371	3,227	3,077	2,999	2,919	2,835	2,749	2,660	2,566
19	3,434	3,297	3,153	3,003	2,925	2,844	2,761	2,674	2,584	2,489
20	3,368	3,231	3,088	2,938	2,859	2,779	2,695	2,608	2,517	2,421
21	3,310	3,173	3,030	2,880	2,801	2,720	2,636	2,548	2,457	2,360
22	3,258	3,121	2,978	2,827	2,749	2,668	2,583	2,495	2,403	2,306
23	3,211	3,074	2,931	2,781	2,702	2,620	2,536	2,447	2,354	2,256
24	3,168	3,032	2,889	2,738	2,659	2,577	2,492	2,404	2,310	2,211
25	3,129	2,993	2,850	2,699	2,620	2,538	2,453	2,364	2,270	2,169
26	3,094	2,958	2,815	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,132
27	3,062	2,926	2,783	2,632	2,552	2,470	2,384	2,294	2,198	2,097
28	3,032	2,896	2,753	2,602	2,522	2,440	2,354	2,263	2,167	2,064
29	3,005	2,869	2,726	2,574	2,495	2,412	2,325	2,234	2,138	2,034
30	2,979	2,843	2,700	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	2,801	2,665	2,522	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	2,632	2,496	2,352	2,198	2,115	2,029	1,936	1,836	1,726	1,601
120	2,472	2,336	2,192	2,035	1,950	1,860	1,763	1,656	1,533	1,381
∞	2,321	2,185	2,039	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000

Kvantily rozložení $F_{0,995}(\nu_1,\nu_2)$ -1.část

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
2	198,50	199,00	199,17	199,25	199,30	199,33	199,36	199,37	199,39
3	55,552	49,799	47,467	46,196	45,392	44,838	44,434	44,126	43,882
4	31,333	26,284	24,259	23,155	22,456	21,975	21,622	21,352	21,139
5	22,785	18,314	16,530	15,556	14,940	14,513	14,200	13,961	13,772
6	18,635	14,544	12,917	12,028	11,464	11,073	10,786	10,566	10,391
7	16,236	12,404	10,882	10,050	9,522	9,155	8,885	8,678	8,514
8	14,688	11,042	9,597	8,805	8,3302	7,952	7,694	7,496	7,339
9	13,614	10,107	8,717	7,956	7,471	7,134	6,885	6,693	6,541
10	12,826	9,427	8,081	7,343	6,872	6,545	6,303	6,116	5,968
11	12,226	8,912	7,600	6,881	6,422	6,102	5,865	5,682	5,537
12	11,754	8,510	7,226	6,521	6,071	5,757	5,525	5,345	5,202
13	11,374	8,187	6,926	6,234	5,791	5,482	5,253	5,076	4,935
14	11,060	7,922	6,680	5,998	5,562	5,257	5,031	4,857	4,717
15	10,798	7,701	6,476	5,803	5,372	5,071	4,847	4,674	4,536
16	10,575	7,514	6,303	5,638	5,212	4,913	4,692	4,521	4,384
17	10,384	7,354	6,156	5,497	5,075	4,779	4,559	4,389	4,254
18	10,218	7,215	6,028	5,375	4,956	4,663	4,445	4,276	4,141
19	10,073	7,094	5,916	5,268	4,853	4,561	4,345	4,177	4,043
20	9,944	6,987	5,818	5,174	4,762	4,472	4,257	4,090	3,956
21	9,830	6,891	5,730	5,091	4,681	4,393	4,179	4,013	3,880
22	9,727	6,806	5,652	5,017	4,609	4,323	4,109	3,944	3,812
23	9,635	6,730	5,582	4,950	4,544	4,259	4,047	3,882	3,750
24	9,551	6,661	5,519	4,890	4,486	4,202	3,991	3,826	3,695
25	9,475	6,598	5,462	4,835	4,433	4,150	3,939	3,776	3,645
26	9,406	6,541	5,409	4,785	4,384	4,103	3,893	3,730	3,599
27	9,342	6,489	5,361	4,740	4,340	4,059	3,850	3,688	3,557
28	9,284	6,440	5,317	4,698	4,300	4,020	3,811	3,649	3,519
29	9,230	6,396	5,276	4,659	4,262	3,983	3,775	3,613	3,483
30	9,180	6,355	5,239	4,623	4,228	3,949	3,742	3,580	3,451
40	8,828	6,066	4,976	4,374	3,986	3,713	3,509	3,350	3,222
60	8,495	5,795	4,729	4,140	3,760	3,492	3,291	3,134	3,008
120	8,179	5,539	4,497	3,921	3,548	3,285	3,087	2,933	2,808
∞	7,879	5,298	4,279	3,715	3,350	3,091	2,897	2,744	2,621

Kvantily rozložení $F_{0,995}(\nu_1,\nu_2)$ -2.část

ν_2 \ ν_1	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	24,224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	199,40	199,42	199,43	199,45	199,46	199,47	199,47	199,48	199,49	199,51
3	43,686	43,387	43,085	42,778	42,622	42,466	42,308	42,149	41,989	41,829
4	20,967	20,705	20,438	20,167	20,030	19,892	19,752	19,611	19,468	19,325
5	13,618	13,384	13,146	12,903	12,780	12,656	12,530	12,402	12,274	12,144
6	10,250	10,034	9,814	9,589	9,474	9,358	9,241	9,122	9,002	8,879
7	8,380	8,176	7,968	7,754	7,645	7,735	7,423	7,309	7,193	7,076
8	7,211	7,015	6,814	6,608	6,503	6,396	6,288	6,177	6,065	5,951
9	6,417	6,227	6,033	5,832	5,729	5,625	5,519	5,410	5,300	5,188
10	5,847	5,661	5,471	5,274	5,173	5,071	4,966	4,859	4,750	4,639
11	5,418	5,236	5,049	4,855	4,756	4,654	4,551	4,445	4,337	4,226
12	5,086	4,906	4,721	4,530	4,432	4,331	4,228	4,123	4,015	3,904
13	4,820	4,643	4,460	4,270	4,173	4,073	3,970	3,866	3,758	3,647
14	4,603	4,428	4,247	4,059	3,961	3,862	3,760	3,655	3,547	3,436
15	4,424	4,250	4,070	3,883	3,786	3,687	3,585	3,480	3,372	3,260
16	4,272	4,099	3,921	3,734	3,638	3,538	3,437	3,332	3,224	3,112
17	4,142	3,971	3,793	3,607	3,511	3,412	3,311	3,206	3,097	2,984
18	4,031	3,860	3,683	3,498	3,402	3,303	3,201	3,096	2,987	2,873
19	3,933	3,763	3,587	3,402	3,306	3,208	3,106	3,000	2,891	2,776
20	3,847	3,678	3,502	3,318	3,222	3,123	3,022	2,916	2,806	2,690
21	3,771	3,602	3,427	3,243	3,147	3,049	2,947	2,841	2,730	2,614
22	3,703	3,535	3,360	3,176	3,081	2,982	2,880	2,774	2,663	2,546
23	3,642	3,475	3,300	3,117	3,021	2,922	2,820	2,713	2,602	2,484
24	3,587	3,420	3,246	3,062	2,967	2,868	2,765	2,659	2,546	2,428
25	3,537	3,370	3,196	3,013	2,918	2,819	2,716	2,609	2,496	2,377
26	3,492	3,325	3,152	2,969	2,873	2,774	2,671	2,563	2,450	2,330
27	3,450	3,284	3,110	2,928	2,832	2,733	2,630	2,522	2,408	2,287
28	3,412	3,246	3,073	2,890	2,794	2,695	2,592	2,483	2,369	2,247
29	3,377	3,211	3,038	2,855	2,759	2,660	2,557	2,448	2,333	2,210
30	3,344	3,179	3,006	2,823	2,727	2,628	2,524	2,415	2,300	2,176
40	3,117	2,953	2,781	2,598	2,502	2,402	2,296	2,184	3,064	1,932
60	2,904	2,742	2,571	2,387	2,290	2,187	2,079	1,962	1,834	1,688
120	2,705	2,544	2,373	2,188	2,089	1,984	1,871	1,747	1,606	1,431
∞	2,519	2,358	2,187	2,000	1,898	1,789	1,669	1,533	1,364	1,000