Multicommodity Network Flows

Pavel Troubil

pavel@ics.muni.cz

Seminář PV177, 21. dubna 2010

Značení, předpoklady

- Síť $G = (N, A)$
- Hrana (i, j) spojuje vrcholy i, j
- Ohodnocení hran – omezení kapacity toku či toků
  - Celočíselné, nezáporné
- Hrany jsou orientované
- u_{ij} – (souhrnná) kapacita hrany
- x_{ij} – (souhrnný) tok na hraně
- c_{ij} – cena jednotkového toku na hraně

Maximální tok

- Aplikace: toky v reálných sítích, plánování paralelních strojů, ...
- Zdrojový vrchol s, stokový vrchol t
- Objektivní funkce: max v

$$\sum_{j \in \mathbf{OUT}(i)} x_{ij} - \sum_{j \in \mathbf{IN}(i)} x_{ij} = \begin{cases} v, & \text{pro } i = s \\ -v, & \text{pro } i = t \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

- Několik polynomiálních algoritmů pro řešení

Nejlevnější tok

Rozdíly vůči maximálnímu toku

- Kapacita toku pevně dána
- Vrcholy mají dáno, kolik toku nabízejí či poptávají
  - Hodnota toku $b(i)$

$$b_i \begin{cases} > 0 & \text{zdroj} \\ < 0 & \text{stok} \\ = 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- Více zdrojových a stokových vrcholů
- Hranám jsou krom kapcity přiřazeny *ceny*
- Hledáme nejlevnější tok

Aplikace

Formulace problému

Objektivní funkce

- max $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$

Omezení

$$\sum_{j\in\mathbf{OUT}(i)} x_{ij} - \sum_{j\in\mathbf{IN}(i)} x_{ji} = b(i)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

Nejlevnější tok – předpoklady

Celočíselné zadání

- Ceny hran, nabídka/poptávka, kapacita
- Optimální celočíselné řešení

Korektní zadání

- Nulový součet toků ve zdrojích a stocích

$$\sum_{i \in N} b(i) = 0$$

- Existence přípustného toku

Nezáporné ceny hran

- Neubírá na obecnosti

Residuální síť

Definice

- Residuální síť $G(x)$ vztažena k síti G a toku x
- Každá hrana $(i, j) \in A$ nahrazena dvěma novými:
  - (i, j) o ceně c_{ij} a kapacitě $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$
  - (j, j) o ceně $c_{ji} = -c_{ij}$ a kapacitě $r_{ij} = x_{ij}$
- Zahrnuje pouze hrany s *pozitivní* kapacitou

Residuální síť a optimální tok

Optimální residuální síť neobsahuje cyklus negativní ceny

- Odstranění takového cyklu by přineslo zlepšení hodnoty objektivní funkce

Neobsahuje-li residuální síť negativní cyklus, pak je tok optimální

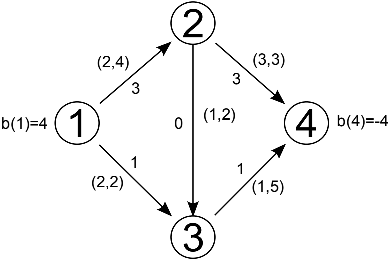
Cycle-canceling algoritmus

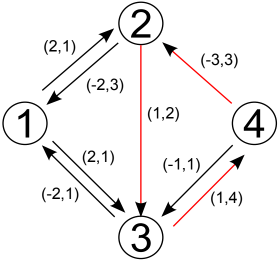
- V každém kroku splňuje omezení
- Tok není vždy optimální

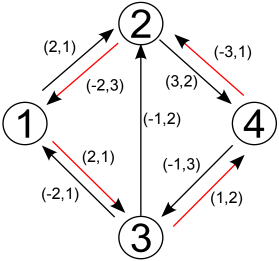
Algoritmus

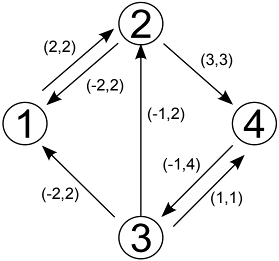
Najdi přípustný tok x
while Residuální síť obsahuje cyklus negativní ceny **do**
  Najdi cyklus W negativní ceny
  Najdi nejmenší kapacitu hrany r_{min} v cyklu W
  Přidej tok velikosti r_{min} do cyklu W
end while

Cycle-canceling – příklad









Potenciál vrcholu

Definice

- Reálné číslo $\pi(i)$ příslušné vrcholu
- Konkrétní interpretace závislá na problému/algoritmu

Využití

- Redukovaná cena hrany

$$c_{ij}^{\pi} = c_{ij} + \pi(i) - \pi(j)$$

- Výpočet v některých algoritmech
- Specifikace optimálních řešení
- Dokazování správnosti algoritmů

Potenciál vrcholu – příklad

Nejkratší cesty z jednoho vrcholu

- $d(i)$ – vzdálenost vrcholu i od počátečního
- Poteciál $\pi(i) = d(i)$
- V optimálním řešení pro všechny hrany platí:

$$c_{ij}^d = c_{ij} + d(i) - d(j) \geq 0$$

- Pro hrany optimálních cest platí

$$c_{ij}^d = 0$$

Successive Shortest Path

Rozdíly vůči Cycle-canceling

- Nezachovává spojitý tok
  - Porušuje omezení daná $b(i)$
- Nalezený tok je stále optimální

Pseudotok

- Tok, který nesplňuje podmínky zachování hmoty

$$e(i) = b(i) - \sum_{j \in \mathbf{IN}(i)} x_{ji} - \sum_{j \in \mathbf{OUT}(i)} x_{ij}$$

- Přebytek ($e(i) > 0$) nebo nedostatek ($e(i) < 0$) toku na vrcholu

Successive Shortest Path

- Pro každý vrchol udržuje hodnoty $e(i), \pi(i)$
- Množiny E, D vrcholů s přebytky a nedostatky

$x \leftarrow 0, \pi \leftarrow 0$
$e(i) \leftarrow b(i)$
Inicializuj množiny E, D
while $E \neq$ **do**
  Vyber $k \in E, l \in D$
  Najdi v $G(x)$ nejkratší cesty ke všem vrcholům z k s použitím redukovaných cen
  $\pi(i) \leftarrow \pi(i) - d(i)$
  $\delta \leftarrow \min\{e(k), -e(l), \min\{r_{ij} : (i,j) \in P\}\}$
  Přidej tok δ po cestě P
  Aktualizuj $G(x), E, D$ a redukované ceny
end while

Successive Shortest Path

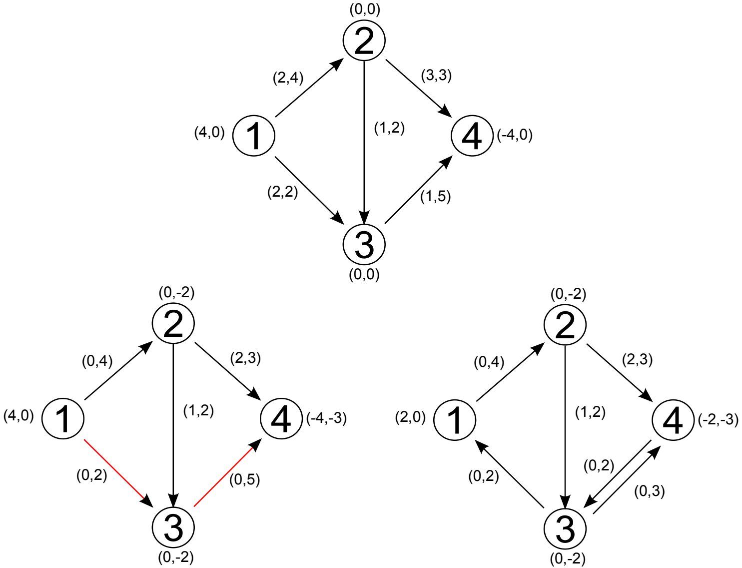
Udržování optimality řešení

- Umožňuje hledat nejkratší cesty v residuální síti

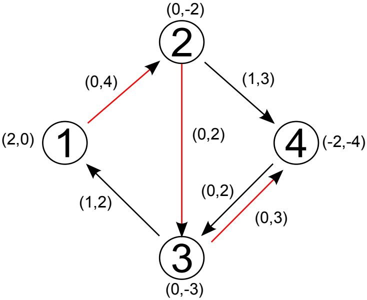
Význam potenciálu v algoritmu

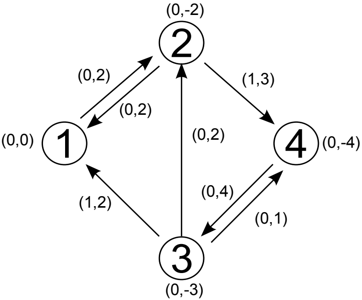
- Zachování nezáporných cen hran v grafu
- Residuální síť – přidává hrany (j, i) s cenou $-c_{ij}$
- Mají-li na nejkratší cestě hrany cenu 0, nevznikají v residuální sítí záporně ohodnocené hrany

Successive Shortest Path – příklad



Successive Shortest Path – příklad





Multicommodity flows

- Namísto jednoho toku několik
- Každý definuje zvlášť zdroje a stoky
- Nezávislé komodity lze rozdělit na více problémů nejmenších toků
- Lépe reprezentuje reálné směrovací problémy
  - Doprava, distribuce zboží, komunikační/počítačové sítě
- Náročnější na řešení

Definice problému

Značení

- K komodit $1, \ldots, k$
- x_{ij}^k - hodnota toku komodity k na hraně (i, j)
- c_{ij}^k - cena toku komodity k na hraně (i, j)

Objektivní funkce

$$\sum_{1 \leq k \leq K} c^k x^k$$

Definice problému

Omezení

$$\forall (i,j) \in A : \sum_{1 \leq k \leq K} x_{ij}^k \leq u_{ij}$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, K\} : Mx^k = b^k$$

$$\forall (i,j) \in A, \forall k \in \{1, \ldots, K\} : 0 \leq x_{ij}^k \leq u_{ij}^k$$

Předpoklady

Homogenita komodit

- Každá komodita zabírá stejný "prostor"

Nepředpokládáme zahlcení

- Cena hrany nezávisí na jejím zatížení

(Ne)dělitelnost komodit

- Výsledek nemusí být celočíselný

Lagrangeovská relaxace

- Price-directive decomposition

Obecně

- Převod omezení do objektivní funkce
- Porušení omezení se lineárně promítne do jejího zhoršení (a naopak)

Konkrétně pro multicommodity flows

- Price-directive decomposition
- Objektivní funkce

$$\min \sum_{1 \le k \le K} c^k x^k + \sum_{(i,j) \in A} w_{ij} \left(\sum_{1 \le k \le K} x_{ij}^k - u_{ij} \right)$$

Reformulace problému

Objektivní funkce

$$\min \sum_{1 \le k \le K} \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^k + w_{ij}) x_{ij}^k - \Big(\sum_{(i,j) \in A} w_{ij} u_{ij} \Big)$$

Omezení

$$\forall k \in \{1, \ldots, K\} : Mx^k = b^k$$

$$\forall (i,j) \in A, \forall k \in \{1, \ldots, K\} : x_{ij} \ge 0$$

Nezávislé nejlevnější toky

- Každé omezení se týká pouze jedné komodity

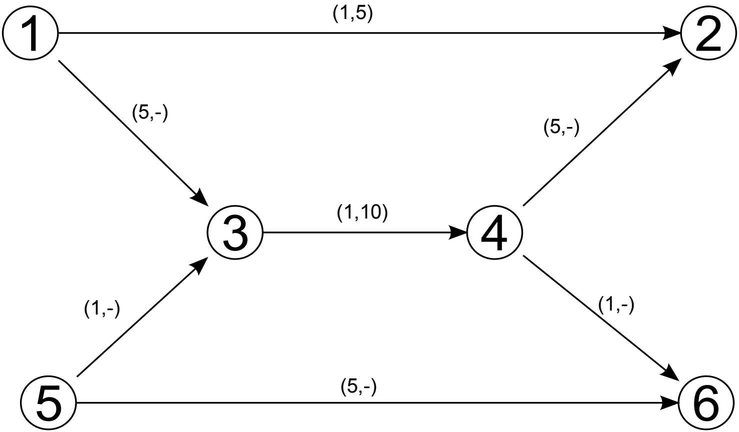
Postup řešení

- Řešení jednotlivých nejlevnějších toků
  - Pevná hodnota Lagrangeových koeficientů w
- Úprava Lagrangeových koeficientů podle vzorce

$$w_{ij}^{q+1} = \max \{0, w_{ij}^{q} + \theta_q (\sum_{1 \le k \le K} y_{ij}^{k} - u_{ij})\}$$

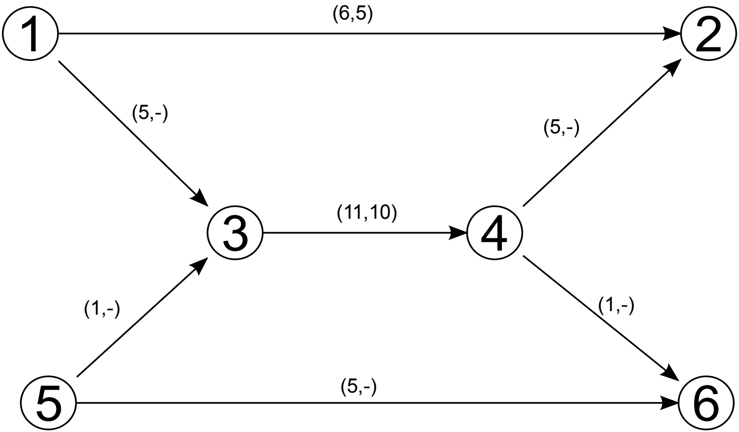
  - Koeficienty jsou vždy nezáporné
  - Koeficient $\theta_q = 1/q$ určuje míru změny Lagrangeových koeficientů

Příklad



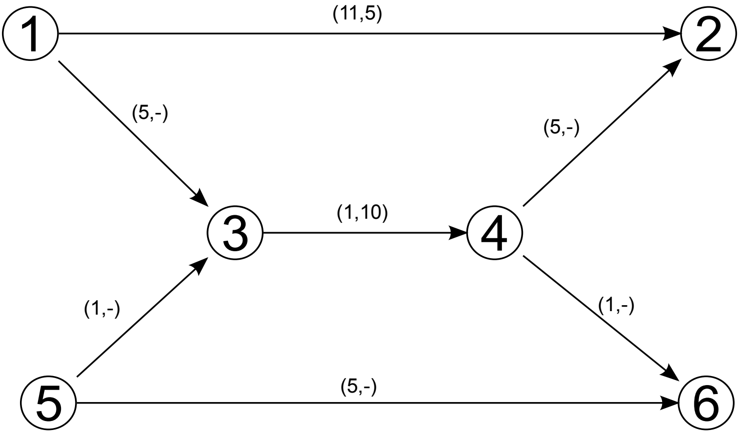
- 2 toky: 1→2 – 10 jednotek, 3→4 – 20 jednotek
- $w_{12}^0 = w_{34}^0 = 0$

Příklad



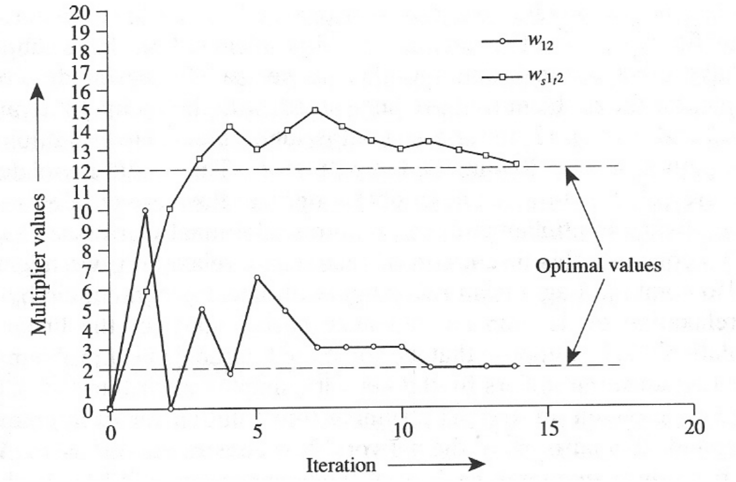
- $w_{12}^{1} = 5$, $w_{34}^{1} = 10$

Příklad

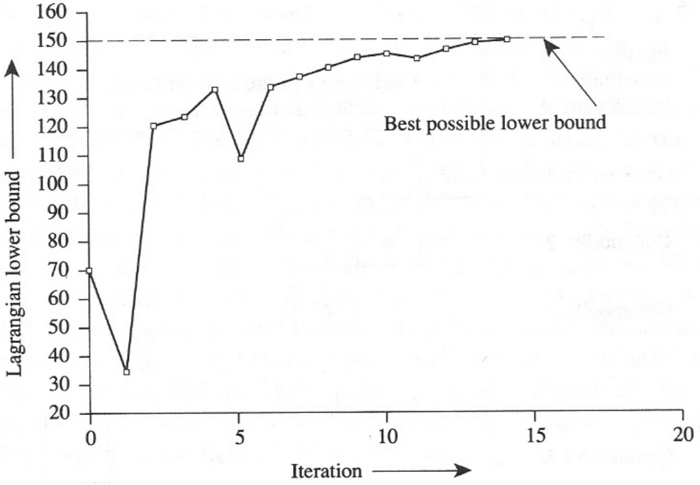


- $w_{12}^2 = 10, w_{34}^2 = 0$

Grafy


20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Multiplier values
0
5
10
15
20
Iteration
w_{12}
$w_{s_1 t_2}$
Optimal values

Grafy


160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
Lagrangian lower bound
Best possible lower bound
0
5
10
15
20
Iteration

Zhodnocení

Výhody

- Využívá struktury problému založené na síťových tocích
- Výpočetně jednoduché úpravy koeficientů

Nevýhody

- Malé kroky $\Rightarrow$ pomalá konvergence
- Konvergence Lagrangeových koeficientů nemusí znamenat konvergenci optimálních řešení podproblému k optimálnímu řešení hlavního problému
- Optimální řešení podproblému nemusí znamenat přípustné řešení hlavního problému

Resource-directive decomposition

- Namísto využití cen pro dekompozici alokuje kapacitu hran jednotlivým komoditám
- Každé komoditě alokováno $r_{ij}^k \leq u_{ij}^k$ z celkové kapacity hrany (i, j)

Resource-directive problem

$$z = \min \sum_{1 \leq k \leq K} c^k x^k$$

$$\forall (i, j) \in A : \sum_{1 \leq k \leq K} r_{ij}^k \leq u_{ij}$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, K\} : M x^k = b^k$$

$$\forall (i, j) \in A, \forall k \in \{1, \ldots, K\} : 0 \leq x_{ij}^k \leq r_{ij}^k$$

Ekvivalence RDP a MCF

Řešení RDP je řešením MCF

- Je-li (x, r) přípustné řešení RDP, pak x je přípustné řešení MCF se stejnou hodnotou objektivní funkce.

Řešení MCF je řešením RDP

- Je-li x přípustné řešení MCF, pak $(x, r = x)$ je přípustné řešení RDP se stejnou hodnotou objektivní funkce.

Výběr hodnot r a x

- Neprovádí se současně

Postup výběru

- Nejprve fixace hodnot r_{ij}^k
- Na jejich základě hledání nejlevnějších toků x_{ij}^k

Resource-allocation problem

- $z(r)$ je optimální hodnota objektivní funkce RDP pro pevně dané r

Resource-allocation problem

$$\min z(r)$$

Omezení

$$\forall (i,j) \in A : \sum_{1 \le k \le K} r_{ij}^k \le u_{ij}$$

$$\forall (i,j) \in A, \forall k \in \{1, \ldots, K\} : 0 \le r_{ij}^k \le u_{ij}^k$$

- Ekvivalentní resource-directive problemu

Dekompozice na nejlevnější toky

- Jsou-li alokovány zdroje pro všechny komodity, stačí vyřešit K problémů nejlevnějšího toku:

$$\min\ c^k x^k$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, K\} : Mx^k = b^k$$

$$\forall (i,j) \in A, \forall k \in \{1, \ldots, K\} : 0 \le x_{ij}^k \le r_{ij}^k$$

Hledání optima funkce $z(r)$

- Řešení multicommodity flow převedeno na problém
  - s jednoduchou strukturou omezení, ale
  - komplexní objektivní funkcí
- Funkce $z(r)$ je konvexní a po částech lineární
- Možné postupy řešení
  - Heuristika – výměna alokací mezi hranami
- Hledání lepších řešení posunem v prostoru proměnných
  - Jak najít správný směr a délku posunu
  - Není-li nalezené řešení přípustné, jak je najít?