Neklasické logiky I

Trojhodnotová Łukasiewiczova logika

Jan Łukasiewicz (1878-1956)

Neklasických logikách

Klasická logika je charakterizovaná

- logickými spojkami špecifikovanými tabuľkami pravdivostných hodnôt,
- systémom axióm a pravidlami odvodenia.

Existujú prípady, keď dichotomický pravdivostný charakter nepostihuje všetky situácie nášho každodenného života.

„Na Marse existuje život“
„Ak na Marse existuje život, potom musí byť podobný životu na Zemi“

Snaha dosiahnuť čo najväčšiu zhodu medzi bežným jazykom a logikou, viedli k vytvoreniu celej rady nových netradičných logík, ktoré sú nazývané *neklasické logiky*.

Neklasické logiky sú charakterizované

- nové logické spojky,
- skúmané sú výroky o ktorých nemôžeme s určitosťou povedať, či sú pravdivé alebo nepravdivé a ktorým pripisujeme ďalšie pravdivostné hodnoty.

Trojhodnotová Łukasiewiczova logika

- Poľský filozof a logik ***Jan Łukasiewicz*** v r. 1920 poukázal na skutočnosť, že v prirodzenom jazyku sa často stretávame so zmysluplnými výrokmi, ktorých pravdivosť nevieme dobre vyhodnotiť

- Łukasiewicz navrhol túto situáciu riešiť tak, že množina pravdivostných hodnôt {0,1} je rozšírená na ***trojhodnotovú množinu {0,½,1}***, kde nová pravdivostná hodnota ½ je interpretovaná ako „neviem“.

- V ***informatike*** takéto rozšírenie klasickej výrokovej logiky môže byť významné v prípadoch, keď objekty sú popísané binárnymi údajmi, v niektorých prípadoch nám buď chýbajú potrebné údaje alebo existujú principiálne dôvody pre ich neexistenciu, takže ***chýbajúce údaje doplníme neutrálnou pravdivostnou hodnotou ½***.

Funkčné vyjadrenie pravdivostných hodnôt logických spojok

logická spojka	funkčné vyjadrenie pravdivostnej hodnoty
$\neg p$	$val(\neg p) = 1 - val(p)$
$p \wedge q$	$val(p \wedge q) = min\{val(p), val(q)\}$
$p \vee q$	$val(p \vee q) = max\{val(p), val(q)\}$
$p \Rightarrow q$	$val(p \Rightarrow q) = min\{1, 1 - val(p) + val(q)\}$

Pravdivostné hodnoty logických spojok pre trojhodnotovú Łukasiewiczovu logiku

A. Negácia

p	$\neg p$	Tp
0	1	½
½	½	½
1	0	½

B. Implikácia

$p \Rightarrow q$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

D. Konjunkcia

$p \wedge q$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

D. Disjunkcia

$p \vee q$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

Tabuľka pravdivostných hodnôt formule $\left(p \wedge q \Rightarrow p\right) \wedge \left(p \Rightarrow p \vee q\right)$

#	p	q	$p\wedge q$	$p\wedge q\Rightarrow p$	$p\vee q$	$p\Rightarrow p\vee q$	$(p\wedge q\Rightarrow p)\wedge(p\Rightarrow p\vee q)$
1	0	0	0	1	0	1	1
2	0	½	0	1	½	1	1
3	0	1	0	1	1	1	1
4	½	0	0	1	½	1	1
5	½	½	½	1	½	1	1
6	½	1	½	1	1	1	1
7	1	0	0	1	1	1	1
8	1	½	½	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1

Príklady zakonov trojhodnotovej Łukasiewiczovej logiky

(1) Zákon totožnosti $(p \Rightarrow p)$.

(2) Zákon dvojitej negácie $(\neg\neg p \equiv p)$.

(3) De Morganov zákon pre konjunkciu $(\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q))$.

(4) De Morganov zákon pre disjunkciu $(\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q))$.

(5) Zákon tranzitívnosti implikácie $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

(6) Distribúcia konjunkcie $((p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$.

(7) Distribúcia disjunkcie $((p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$.

(8) Zákon kontrapozície $((p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}))$

(9) Zákon modus ponens $p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$

(10) Zákon modus tollens $\neg q \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p)$

Axiomatický systém 3-hodnotovej Łukasiewiczovej logiky

Systém axióm pre 3-hodnotovú výrokovú logiku navrhol Łukasiewiczov žiak M. Wajsberg (1932)

$$\boldsymbol{Ax_1}.\ p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$
$$\boldsymbol{Ax_2}.\ (p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$
$$\boldsymbol{Ax_3}.\ (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$
$$\boldsymbol{Ax_4}.\ ((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow p) \Rightarrow p$$

Pravidlo odvodzovanie je modus ponens.

Veta o korektnosti a úplnosti (Wajsberg).
Formula je odvoditeľná odvoditeľná pomocou axiomatického systému vtt, ak je tautológia.

Veta o dedukcii v 3-hodnotovej logike neplatí.

Táto veta v klasickej výrokovej logike môže byť reprezentovaná formulou $\left(\left(\varphi \wedge \alpha\right) \Rightarrow \beta\right) \Rightarrow \left(\varphi \Rightarrow \left(\alpha \Rightarrow \beta\right)\right)$, podľa ktorej, ak z $\varphi \wedge \alpha$ vyplýva β, potom z φ vyplýva implikácia $\alpha \Rightarrow \beta$. Ľahko sa presvedčíme pomocou metódy sémantických tabiel, že táto formula ***nie je tautológia*** v 3-hodnotovej logike.

Problém jej funkčnej úplnosti v 3-hodnotovej logike

Jednoduchými úvahami sa dá dokázať, že unárna logická spojka T nie je vyjadriteľná pomocou implikácie a negácie.

Unárna logická spojka T.

p	Tp
0	½
½	½
1	½

Dá sa ukázať, že ak spojku T pripojíme k negácii a implikácii dostaneme funkčne úplný systém, t.j. ľubovolná unárna alebo binárna funkcia je vyjadriteľná pomocou symbolov $\{\neg, T, \Rightarrow\}$.

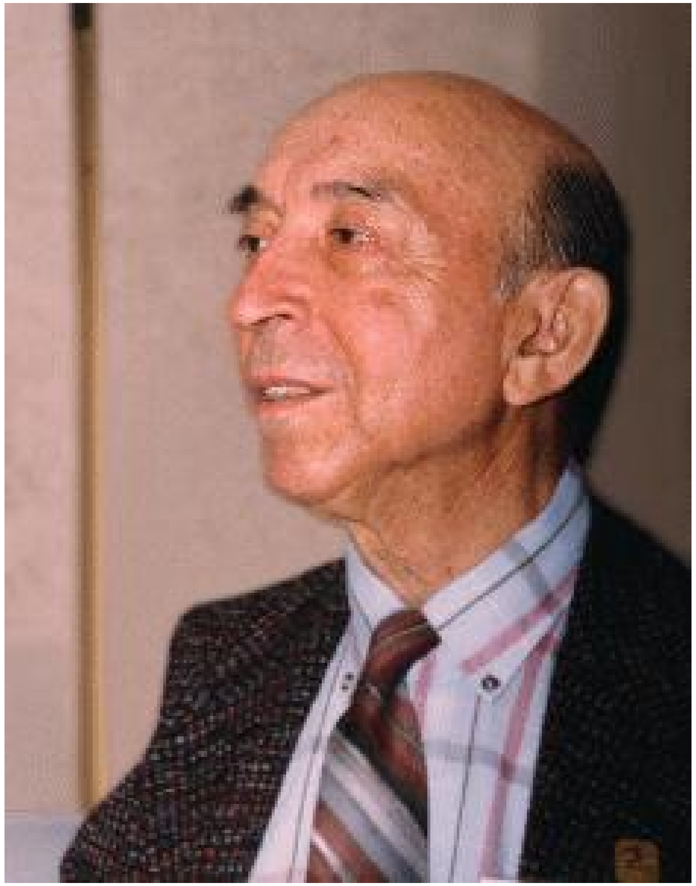
Axiomatický systém je rozšírený o dve axiómy

$$\boldsymbol{Ax_6}.\ Tp \Rightarrow \neg Tp$$
$$\boldsymbol{Ax_7}.\ \neg Tp \Rightarrow Tp$$

Veta .
Modifikovaný *systém axióm* je *korektný a úplný*.

Neklasické logiky II

Fuzzy logika a fuzzy množiny



Lotfi A. Zadeh (∗1921), University of California Berkeley

Úvodné poznámky

- Náš svet je plný ***nejasne ohraničených pojmov***, s ktorými však vieme pomerne dobre intuitívne narábať prostredníctvom nášho prirodzeného jazyka.
- Špecifikácia pojmu „mladý“. Okamžite zistíme, že obsah tohto pojmu je ***silne závislý od subjektívnej interpretácie*** a len veľmi ťažko by sme našli úplnú zhodu v interpretácií tohto pojmi od dvoch rôznych ľudí.
- Práve takéto a ***podobné problémy sú študované pomocou fuzzy množín***, ktorá ponúka teoretický aparát, ktorý umožňuje jednoduché modelovanie týchto problémov a ich implementáciu na počítačoch.

- Termín „***fuzzy logika***“ vznikol ako vedľajší produkt rozvoja teórie ***fuzzy množín***, ktoré boli zavedené americkým (narodeného v azarbejdžanskom Baku) kybernetikom Lotfi A. Zadeh, keď v roku 1965 publikoval prácu *Fuzzy sets* v časopise *Information and Control*.
- Fuzzy množiny tvoria ***neobyčajne efektívny teoretický r***ámec pre modelovanie vágnosti pojmov, pomocou ktorého je možné špecifikovať nejasne ohraničené pojmy.
- Zadehove idey sa rýchlo ujali a stali sa ***štandardnou súčasťou nielen informatiky ale aj kybernetiky*** (vedy o riadení a regulácii procesov) ako efektívny inžiniersky prostriedok pre formalizáciu, modelovanie a riadenie systémov, ktoré sú popísané pomocou vágnych pojmov.

The American Heritage Dictionary

fuzz·y (fŭz′ē) *adj.* **fuzz·i·er**, **fuzz·i·est**. **1.** Covered with fuzz. **2.** Of or resembling fuzz. **3.** Not clear; indistinct: *a fuzzy recollection of past events.* **4.** Not coherent; confused: *a fuzzy plan of action.* [Perhaps from Low German *fussig*, spongy. See **pŭ-** below.] **--fuzz′i·ly** *adv.* **--fuzz′i·ness** *n.*

Fuzzy girl

Klasická teória (crisp) množín

Uvažujme univerzálnu množinu (univerzum) U. Potom ľubovolná (crisp) podmnožina univerza U môže byť vyjadrená takt

$$A = \{x \in U \; ; \mu_A(x) = 1\}$$

angl. crisp znamená krehký, chrumkavý

kde $\mu_A(x)$ je charakteristická funkcia

$$\mu_A : U \to \{0,1\}$$

ktorá ohodnocuje každý element x univerza U binárnym číslom $\mu_A(x) \in \{0,1\}$.

$$\mu_A(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A$$
$$\mu_A(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$$

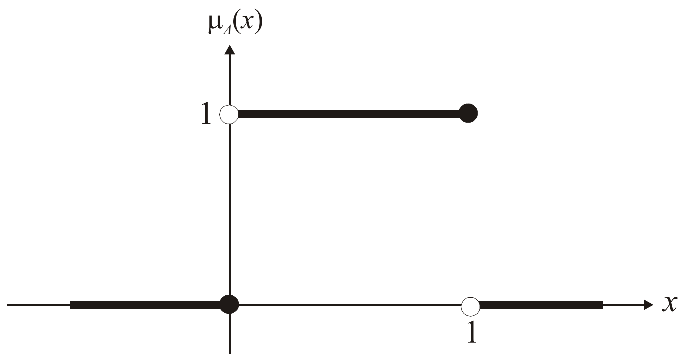
Príklad

Vyjadrite množinu - polootvorený interval $A=(0,1]$ pomocou charakteristickej funkcie.

Univerzum U je totožné s množinou reálnych čísel R. Charakteristická funkcia $\mu_A(x)$ je v tomto prípade definovaná takto

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & (\text{pre } 0<x\leq 1)\\ 0 & (\text{ináč})\end{cases}$$

Grafické znázornenie tejto charakteristickej funkcie



Operácie nad crisp množinami

Nech A a B sú dve množiny definované nad univerzom U

$$A = \{x \in U \,;\, \mu_A(x) = 1\} \text{ a } B = \{x \in U \,;\, \mu_B(x) = 1\}$$

(1) *Rovnosť* množín A a B

$$A = B =_{def} \forall (x \in U)\left(\mu_A(x) = \mu_B(x)\right)$$

(2) A je *podmnožina* B, $A \subseteq B$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &=_{def} \forall (x \in U)\left((x \in A) \Rightarrow (x \in B)\right) \\ &=_{def} \forall (x \in U)\left((\mu_A(x) = 1) \Rightarrow (\mu_B(x) = 1)\right) \\ &=_{def} \forall (x \in U)\left(\mu_A(x) \le \mu_B(x)\right) \end{aligned}$$

(3) *Zjednotenie* množín A a B, $A \cup B$

$$A \cup B =_{def} \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cup B}(x) = 1\}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

(4) *Prienik* množín A a B, $A \cap B$

$$A \cap B =_{def} \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\} = \{x; \mu_{A \cap B}(x) = 1\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

(5) *Doplnok* $\overline{A}$ množiny A (vzhľadom k univerzu U)

$$\overline{A} =_{def} \{x; \neg x \in A\} = \{x; \mu_{\overline{A}}(x) = 1\}$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

(6) *Prázdna* množina $A = \varnothing$ množiny A (vzhľadom k univerzu U), charakteristická funkcia vyhovuje podmienke

$$\forall \left(x \in U \right) \left(\mu_A \left(x \right) = 0 \right)$$

(7) *Univerzálna* množina $A = U$, charakteristická funkcia vyhovuje podmienke

$$\forall \left(x \in U \right) \left(\mu_A \left(x \right) = 1 \right)$$

Formuly klasickej (crisp) teórie množín

vlastnosť	teória množín
komutatívnosť	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
asociatívnosť	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
distributívnosť	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morganove vzťahy	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
idempotentnosť	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
identita	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$

Všetky množinovo-teoretické vzťahy môžeme jednoducho dokázať použitím charakteristických funkcií.

$$\begin{aligned}\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) &= max\{\mu_A(x),\mu_{B\cap C}(x)\} = max\{\mu_A(x),min\{\mu_B(x),\mu_C(x)\}\}\\ &= min\{max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},max\{\mu_A(x),\mu_C(x)\}\}\\ &= min\{\mu_{A\cup B}(x),\mu_{A\cup C}(x)\}\\ &= \mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)\end{aligned}$$

Pri dôkaze tejto formuly sme použili identitu

$$max\{a,min\{b,c\}\} = min\{max\{a,b\},max\{a,c\}\}$$

ktorá sa ľahko dokážeme pomocou verifikácie všetkých možných hodnôt a, b a c.

Fuzzy množiny

Ilustratívny príklad kopy piesku

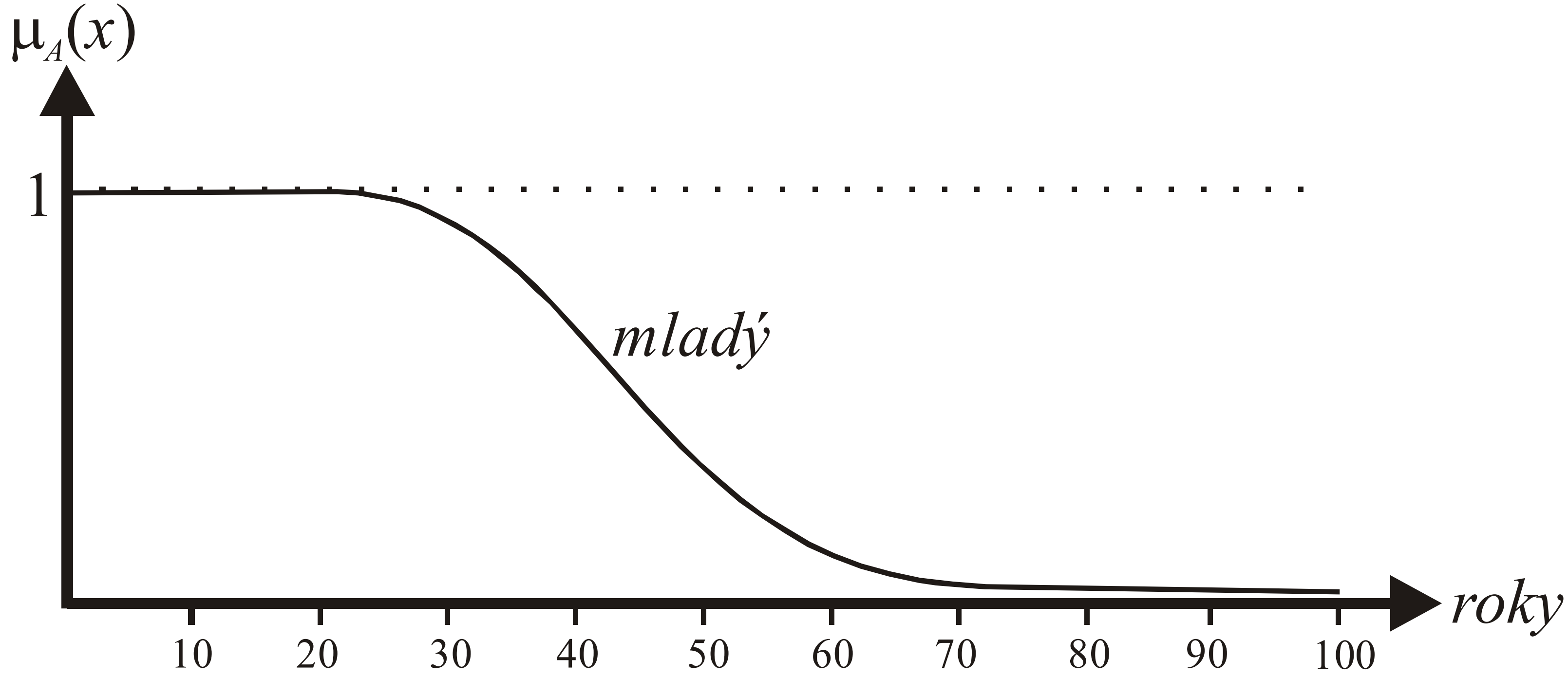
Nech U je univerzum tvorené zo zrniek piesku, $U = \{z_1, z_2, ..., z_n ...\}$, kde z_i je i-té zrnko piesku. Rekurentne budeme vytvárať podmnožinu $K = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ tak, že k nej budeme pridávať jedno zrnko piesku, $K \leftarrow K \cup \{z_{p+1}\}$. Od určitého počtu zrniek piesku (kardinality), množinu K môžeme nazývať *kopa*.

(1) Taxatívne kritérium kopy

$$|K| \geq \vartheta \quad \Rightarrow \quad K \text{ je kopa}$$

(2) Taxatívne kritérium pre kopu piesku je silne zaťažené subjektívnym pohľadom jej tvorcu na to čo, aké množstvo zrniek piesku sa považuje za kopu.

Priebeh charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ fuzzy množiny *A* „mladý“.



Koncepcia fuzzy množín nám poskytuje možnosť ako formalizovať „fuzzy“ pojem mladosti. Nech U je univerzum tvorené prirodzenými číslami od 1 do 100, $U = \{1, 2, ..., 100\}$. Fuzzy množina A vyjadrujúca adjektívum „mladý“ je špecifikovaná charakteristickou funkciou s oborom funkčných hodnôt z uzavretého intervalu $[0,1]$

$$\mu_A : U \rightarrow [0,1]$$

s kvalitatívnym priebehom znázorneným na obrázku Alternatívny názov charakteristickej funkcie $\mu_A(x)$ je stupeň príslušnosti prvku - argumentu x do fuzzy množiny „mladý“

Definícia
Fuzzy množina A je definovaná

$$A=\left\{\left(x,\mu_A\left(x\right)\right);\, x\in U\right\}$$

kde U je univerzum a $\mu_A\left(x\right)$ je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti x do A).

Poznámka. Pojem fuzzy množiny A splýva s pojmom jej charakteristickej funkcie $\mu_A\left(x\right)$, ktorá ju spolu s univerzom U jednoznačne určuje. Zápis $x\in A$ (čítame ako x je A) sa v teórii fuzzy množín interpretuje pomocou príslušnej charakteristickej funkcie $\mu_A\left(x\right)$ tak, že stupeň príslušnosti elementu x do fuzzy množiny A je učený hodnotou $\mu_A\left(x\right)$.

Operácia na fuzzy množinamy

$$A = \left\{ \left(x, \mu_A(x) \right); x \in U \right\} \text{ a } B = \left\{ \left(x, \mu_B(x) \right); x \in U \right\}$$

(1) *Zjednotenie* fuzzy množín

$$A \cup B = \left\{ \left(x, \mu_{A \cup B}(x) \right); x \in U \right\}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\}$$

(2) *Prienik* fuzzy množín

$$A \cap B = \left\{ \left(x, \mu_{A \cap B}(x) \right); x \in U \right\}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = min\left\{ \mu_A(x), \mu_B(x) \right\}$$

(3) *Doplnok* fuzzy množíny

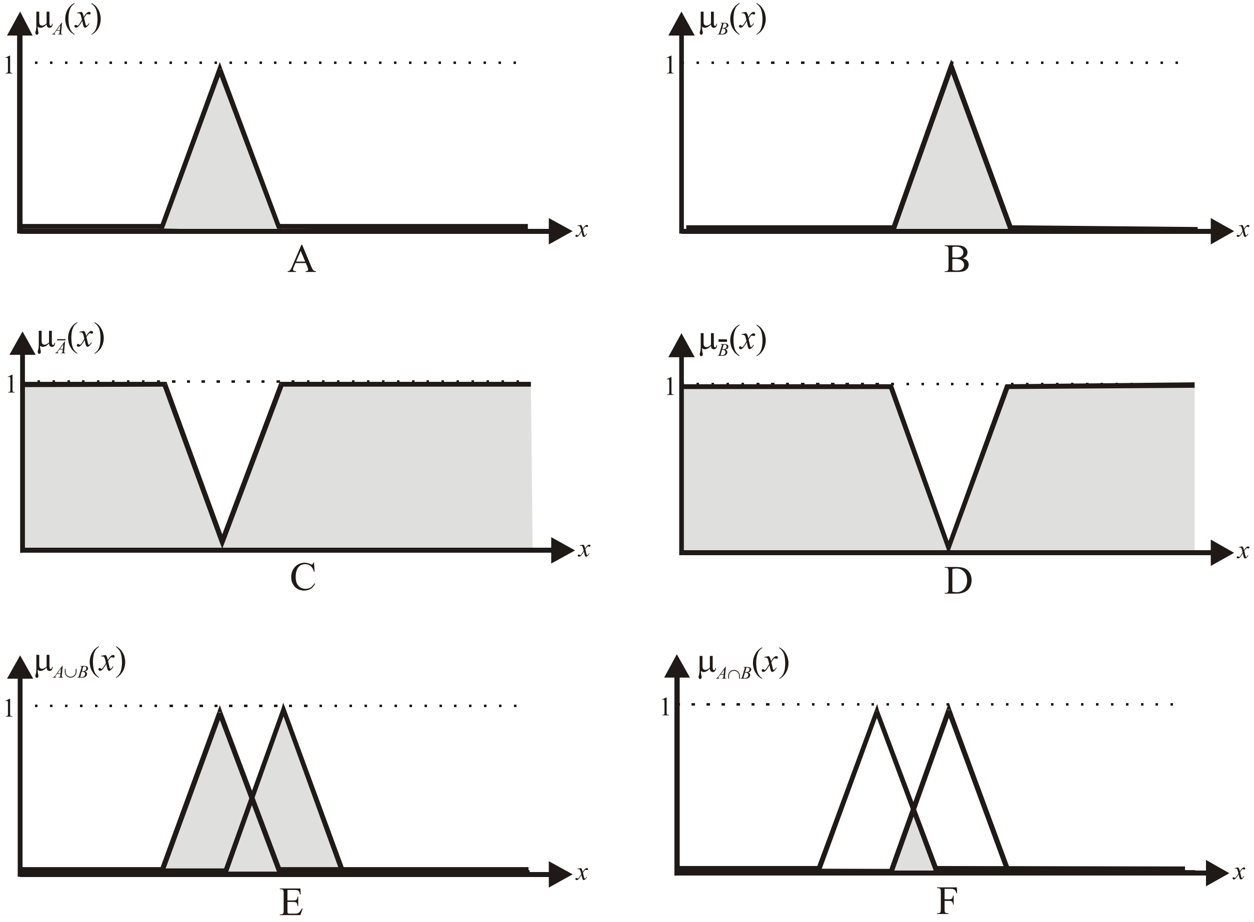
$$\overline{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\overline{A}}(x) \right); x \in U \right\}$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

(4) *Podmnožina* fuzzy množín

$$A \subseteq B =_{def} \forall \left(x \in U \right) \left(\mu_A(x) \le \mu_B(x) \right)$$

Priebehy charakteristických funkcií fuzzy množín A a B, ich komplementov , prieniku a zjednotenia.



Ktoré vzťahy platné pre klasické „crisp“ množiny platia aj pre fuzzy množiny?

(1) ***Zákon vylúčenia tretieho*** $A \cup \overline{A} = U$ pre fuzzy množiny je neplatný.

$$\mu_{A \cup \overline{A}}\left(x\right) = max\left\{\mu_A\left(x\right), \mu_{\overline{A}}\left(x\right)\right\} = max\left\{\mu_A\left(x\right), 1 - \mu_A\left(x\right)\right\} = 1$$

Táto podmienka evidentne nie je splnená pre fuzzy množiny, kde môže nastať prípad $0 < \mu_A\left(x\right) < 1$, potom napr. pre $\mu_A\left(x\right) = 0.9$ dostaneme $0.9 = 1$, čo je spor.

(2) ***Zákon sporu*** $A \cap \overline{A} = \varnothing$ je pre fuzzy množiny neplatný

$$\mu_{A\cap\overline{A}}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_{\overline{A}}(x)\} = min\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x)\} = 0$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade tento vzťah neplatí pre fuzzy množiny, kde $0 < \mu_A(x) < 1$.

(3) Distributívny zákon $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ je platný pre fuzzy množiny.

$$\begin{aligned}
\mu_{A\cup(B\cap C)}(x) &= max\{\mu_A(x), \mu_{B\cap C}(x)\} = max\{\mu_A(x), min\{\mu_B(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= min\{max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, max\{\mu_A(x), \mu_C(x)\}\} \\
&= min\{\mu_{A\cup B}(x), \mu_{A\cup C}(x)\} \\
&= \mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x)
\end{aligned}$$

Fuzzy relácie

Binárna ***relácia*** v klasickej (crisp) teórie množín je definovaná ako ľubovolná podmnožina karteziánskeho súčinu dvoch množín

$$\boxed{R = \left\{ \left(x,z \right); x \in A \wedge y \in B \right\} \subseteq A \times B}$$

„Crisp" relácia R je definovaná pomocou ***charakteristickej funkcie*** takto

$$\boxed{R = \left\{ \left(x,y \right); x \in A \wedge y \in B \wedge \mu_R \left(x,y \right) = 1 \right\}}$$

Príklad

$$\underbrace{\{1,2,3\}}_{A} \times \underbrace{\{p,q\}}_{B} = \left\{ \left(1,p\right), \left(2,p\right), \left(3,p\right), \left(1,q\right), \left(2,q\right), \left(3,q\right) \right\}$$

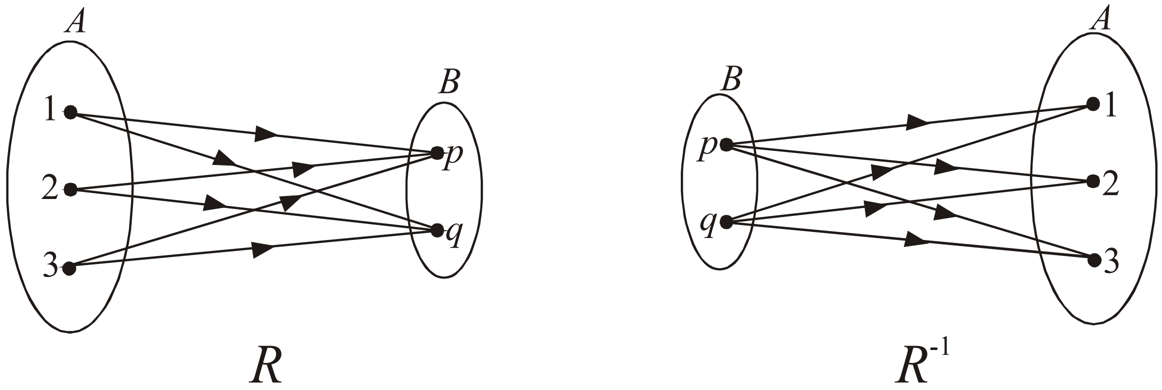
Relácia R je ľubovolná podmnožina tejto množiny , napr.

$$R = \left\{ \left(1,p\right), \left(3,p\right), \left(1,q\right), \left(3,q\right) \right\} \subseteq A \times B$$

Inverzná relácia R^{-1} (k relácii R) je definovaná pomocou usporiadaných dvojíc $(y,x)\in R^{-1}$, ktorých inverzia patrí do relácie $(x,y)\in R$

$$\boxed{R^{-1}=\left\{(y,x);(x,y)\in R\right\}\subseteq B\times A}$$

Diagramatická reprezentácia inverznej relácie sa zostrojí jednoduchým spôsobom z diagramatickej reprezentácie pôvodnej R tak, že jednotlivé hrany (zobrazenia) zmenia svoju orientáciu.

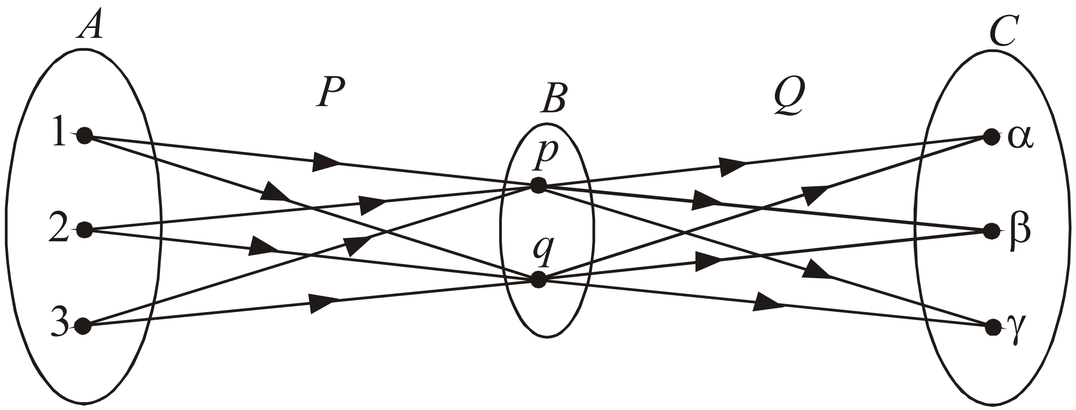


Zložená relácia

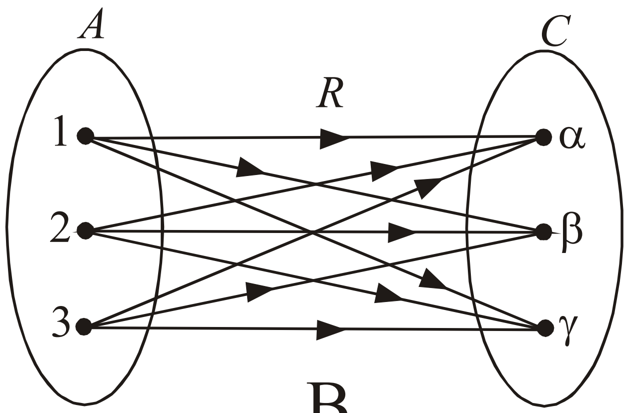
Majme tri množiny A, B a C, pre tieto množiny nech sú definované dve relácie $P \subseteq A \times B$ a $Q \subseteq B \times C$,

Zložená relácia (***kompozícia***) $R = P \circ Q$ je definovaná ako nový relácia $R \subseteq A \times C$ takto

$$\boxed{R = P \circ Q = \left\{ \left(x,z \right); x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B : \left(\left(x,y \right) \in P \right) \wedge \left(\left(y,z \right) \in Q \right) \right\}}$$



A

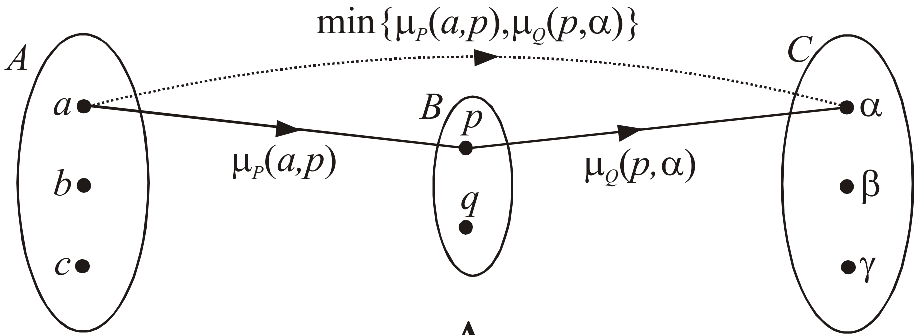


B

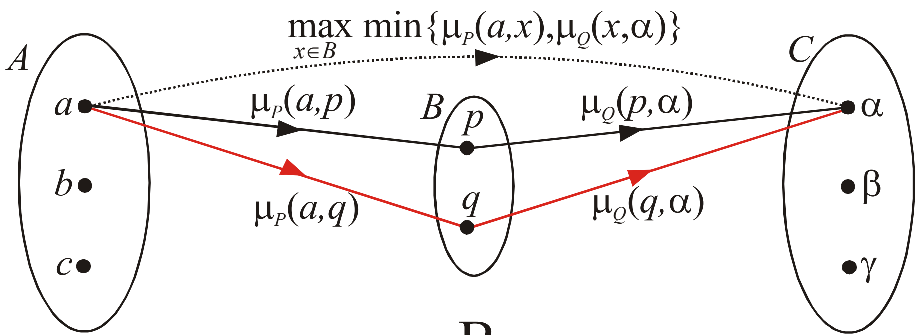
Charakteristická funkcia kompozície $R = P \circ Q$ je určená vzťahom

$$\boxed{\mu_{P\circ Q}(x,z) = \max_{y\in B} \min\left\{\mu_P(x,y), \mu_Q(y,z)\right\}}$$

Význam tohto vzťahu priamo vyplýva z definície kompozície dvoch relácií *P* a *Q*.



A

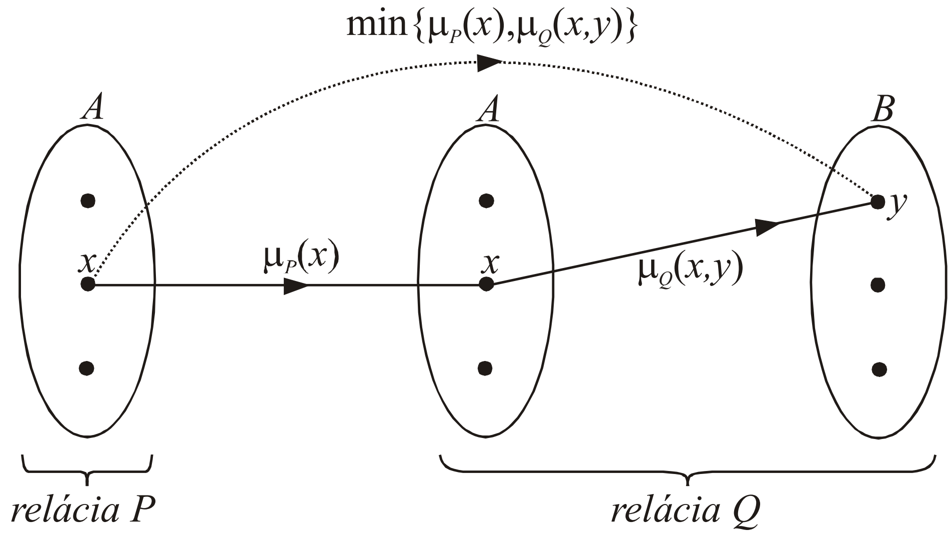


B

Diagonálna relácia

Nech $P \subseteq A \times A$ je ***diagonálna relácia***, ktorej charakteristická funkcia pre nediagonálne elementy je nulová, $\mu_P(x,y)=0$, pre $x \neq y$. Tento typ relácie je formálne určený vzťahom $P=\{(x,x);\, x\in A \wedge \mu_P(x,x)=\mu_P(x)=1\}$. Potom kompozícia diagonálnej relácie $P \subseteq A\times A$ s reláciou $Q \subseteq A\times B$ je určená takto

$$\boxed{\mu_{P\circ Q}(y)=\max_{x\in A} \min\{\mu_P(x),\mu_Q(x,y)\}}$$



Definícia

Fuzzy relácia R je definovaná

$$\boxed{R = \left\{ \left(\left(x,y \right), \mu_R\left(x,y \right) \right); \left(x,y \right) \in A \times B \right\}}$$

kde A, B sú dané množiny a $\mu_R\left(x,y\right)$je charakteristická funkcia (stupeň príslušnosti dvojice (x,y) do relácie R).

Kompozícia dvoch fuzzy relácií $P \subseteq A \times B$ a $Q \subseteq B \times C$ je určená analogickými vzťahmi, ktoré boli pôvodne definované pre „crisp“ relácie

$$\mu_{P \circ Q}\left(x,z\right) = \max_{y \in B} min\left\{ \mu_P\left(x,y\right), \mu_Q\left(y,z\right) \right\}$$

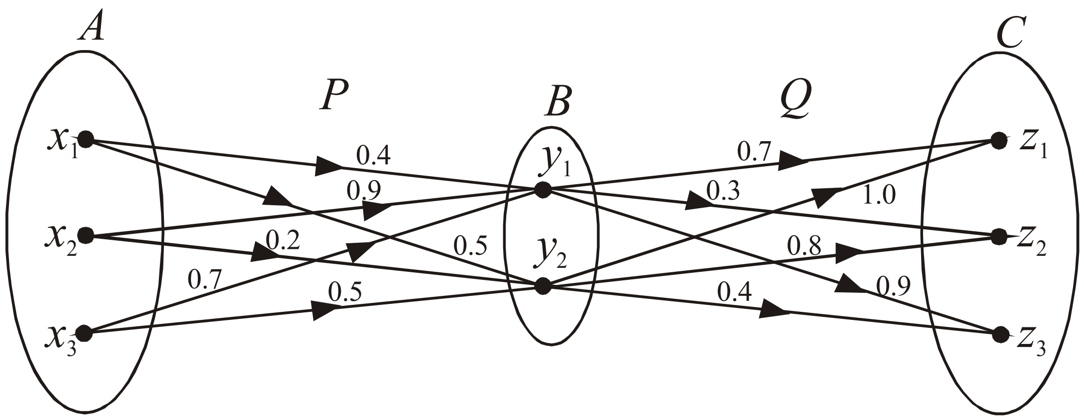
Príklad

Nech fuzzy relácie P a Q sú definované nad dvojicami množín A,B resp. B,C, pričom tieto množiny majú tvar $A=\{x_1,x_2,x_3\}$, $B=\{y_1,y_2\}$, $C=\{z_1,z_2,z_3\}$ a príslušné charakteristické funkcie sú určené tab. 10.2 (pozri taktiež obr. 10.8)

Špecifikácia charakteristických funkcií relácií P a Q

$\mu_P(x,y)$	y_1	y_2
x_1	0.4	0.5
x_2	0.9	0.2
x_3	0.7	0.5

$\mu_Q(x,y)$	z_1	z_2	z_3
y_1	0.7	0.3	0.9
y_2	1.0	0.8	0.4



$$\mu_{P\circ Q}\left(x_1,z_1\right)=max\left\{min\left\{\mu_P\left(x_1,y_1\right),\mu_Q\left(y_1,z_1\right)\right\},min\left\{\mu_P\left(x_1,y_2\right),\mu_Q\left(y_2,z_1\right)\right\}\right\}$$

$$=max\left\{min\left\{0.4,0.7\right\},min\left\{0.5,1.0\right\}\right\}=max\left\{0.4,0.5\right\}=0.5$$

Výsledná charakteristická funkcia relácie $R=P\circ Q$

$\mu_R\left(x,y\right)$	z_1	z_2	z_3
x_1	0.5	0.5	0.4
x_2	0.7	0.3	0.9
x_3	0.7	0.5	0.7

Pretože fuzzy relácia bola definovaná ako fuzzy množina, môžeme nad množinou fuzzy relácií, ktoré sú špecifikované nad rovnakou dvojicou množín A a B definovať operácie zjednotenia a prieniku fuzzy relácií. Nech $P,Q \subseteq A \times B$ sú dve fuzzy relácie s charakteristickými funkciami $\mu_P(x,y)$ resp. a $\mu_Q(x,y)$, potom ich prienik a zjednotenie sú definované v súhlase s definíciami týchto operácii pre fuzzy množiny

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_{P\cap Q}(x,y) &= min\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\} \\ \mu_{P\cup Q}(x,y) &= max\{\mu_P(x,y),\mu_Q(x,y)\} \end{aligned}}$$

pre každé $(x,y) \in A \times B$.

Veta.

Nech P, Q a R sú fuzzy relácie definované nad takými množinami, aby nasledujúce operácie boli prípustné, potom platí

$$\boxed{\begin{gathered}(P \circ Q)^{-1} = P^{-1} \circ Q^{-1}\\ (P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)\\ P \circ (Q \cup R) = (P \circ Q) \cup (P \circ R)\\ (Q \cup R) \circ P = (Q \circ P) \cup (R \circ P)\\ P \circ (Q \cap R) = (P \circ Q) \cap (P \circ R)\\ (Q \cap R) \circ P = (Q \circ P) \cap (R \circ P)\end{gathered}}$$