(Pr 3) Relace na množině $\mathbb{Z}$:

$$a \sim b \iff a \le b \text{ nebo } a \cdot b > 0.$$

Tranzitivita:

nechť $a \sim b$ & $b \sim c$, pak ($a \le b$ nebo $a \cdot b > 0$) a ($b \le c$ nebo $b \cdot c > 0$).

Jako podmínka je splněna ve čtyřech případech:

(i) $a \le b$ & $b \le c \implies a \le b \le c \implies a \le c \implies a \sim c$

(ii) $a \le b$ & $b \cdot c > 0 \implies (*)$

(iii) $a \cdot b > 0$ & $b \le c \implies$ SAMI

(iv) $a \cdot b > 0$ & $b \cdot c > 0 \implies a \cdot c > 0 \implies a \sim c$

$+\ +$ | $+\ +$ | $+\ +$

$-\ -$ | $-\ -$ | $-\ -$

$(*)$ $a \le b$ & $b \cdot c > 0 \implies$ ($a \cdot c > 0$ nebo $a \le c$)

1) $\boxed{c > 0}$ & $b > 0$ & $a \le b$

tj. neplatí $a \cdot c > 0$ nebo $a \le c$

předpokládejme, že $\sim$ není tranzitivní, tedy $a \cdot c \le 0$ & $\boxed{a > c}$,

pak $\boxed{a > c > 0}$, pak $a \cdot c > 0$, spor s tím, že $a \cdot c \le 0$.

Proto nutně musí platit aspoň jedna z podmínek $a \cdot c > 0$ nebo $a \le c$.

Proto $a \sim c$.

NEBO

2) $c < 0$ & $b < 0$ & $a \le b \implies a \le b < 0 \implies a < 0 \implies a \cdot c > 0$ $(- \cdot - = +)$

$\implies a \sim c$

protože ve všech případech (i) – (iv) dostáváme $a \sim c$,

je relace $\sim$ tranzitivní!