IB112 Základy matematiky

Grafy

Jan Strejček

Obsah

Základní pojmy

Graf

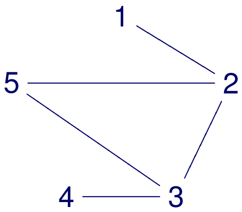
Definice (Graf)

(Neorientovaný) graf je dvojice $G = (V, E)$, kde

- *V je množina uzlů nebo též vrcholů a*
- *E je množina hran, kde hrana je dvouprvková podmnožina množiny V.*

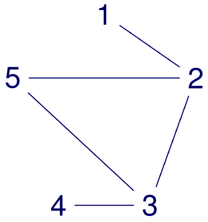
Příklad

- $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\})$



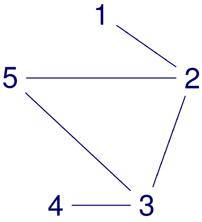
Poznámky

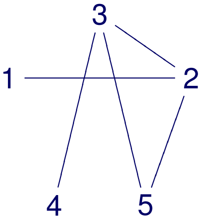
- Množiny vrcholů a hran grafu G zapisujeme také $V(G), E(G)$.
- Grafy se obvykle znázorňují graficky.



Poznámky

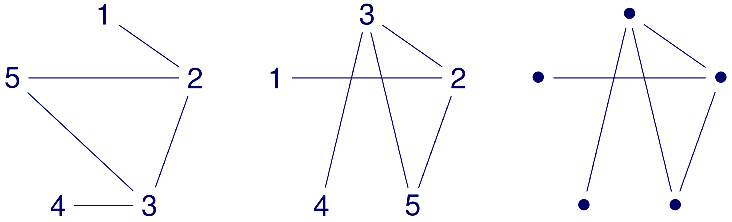
- Množiny vrcholů a hran grafu G zapisujeme také $V(G), E(G)$.
- Grafy se obvykle znázorňují graficky.
- Na rozmístění uzlů nezáleží.





Poznámky

- Množiny vrcholů a hran grafu G zapisujeme také $V(G), E(G)$.
- Grafy se obvykle znázorňují graficky.
- Na rozmístění uzlů nezáleží.
- Často nám jde spíše o strukturu grafu než o pojmenování uzlů. Jména uzlů pak nepíšeme.

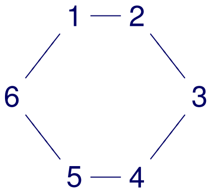


Základní typy grafů

Kružnice

- Kružnice délky n má $n \geq 3$ vrcholů spojených n hranami do jednoho cyklu.
- Značí se C_n.

C_6

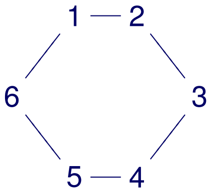


Základní typy grafů

Kružnice

- Kružnice délky n má $n \geq 3$ vrcholů spojených n hranami do jednoho cyklu.
- Značí se C_n.

C_6



Cesta

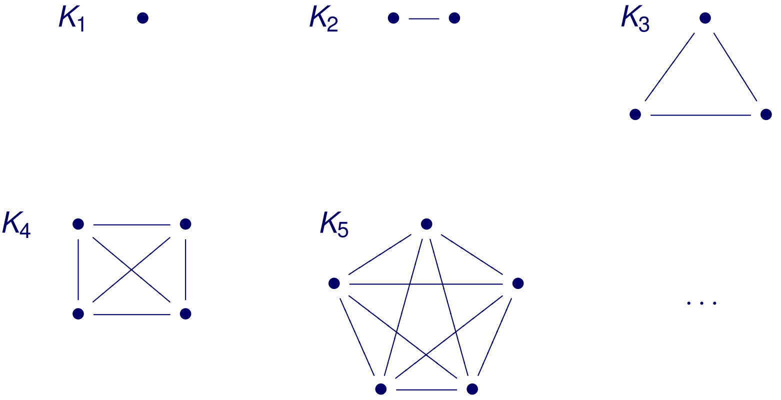
- Cesta délky $n \geq 0$ má $n + 1$ vrcholů spojených do řady n hranami.
- Značí se P_n.

P_6 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7

Základní typy grafů

Úplný graf

- Úplný graf s n vrcholy má $n \geq 1$ vrcholů a mezi každými dvěma vrcholy vede hrana. Celkem má tedy $\binom{n}{2}$ hran.
- Značí se K_n.

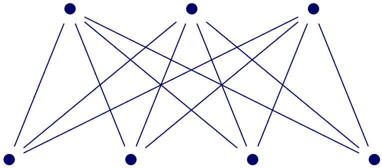


Základní typy grafů

Úplný bipartitní graf

- Úplný bipartitní graf s $n \geq 1$ a $m \geq 1$ vrcholy má $n + m$ vrcholů rozdělených do dvou množin po n a m prvcích. Graf má hranu mezi každými dvěma vrcholy z různých skupin.
- Značí se $K_{n,m}$.

$K_{3,4}$



Příklad

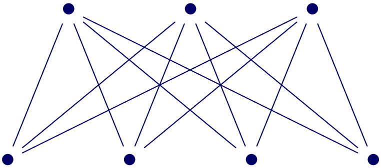
- Existuje graf, který je zároveň úplný a úplný bipartitní?

Základní typy grafů

Úplný bipartitní graf

- Úplný bipartitní graf s $n \geq 1$ a $m \geq 1$ vrcholy má $n + m$ vrcholů rozdělených do dvou množin po n a m prvcích. Graf má hranu mezi každými dvěma vrcholy z různých skupin.
- Značí se $K_{n,m}$.

$K_{3,4}$



Příklad

- Existuje graf, který je zároveň úplný a úplný bipartitní?
- Ano.

$K_2 = K_{1,1}$

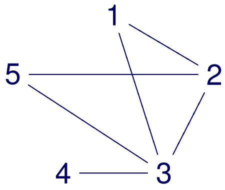
Stupeň vrcholu

Definice (Stupeň vrcholu)

Stupeň vrcholu u v grafu G je počet hran vycházejících z u. Stupeň vrcholu značíme $d_G(u)$ nebo jen $d(u)$.

Příklad

- Zjistěte stupně vrcholů.



$$
\begin{aligned}
d(1) &= \\
d(2) &= \\
d(3) &= \\
d(4) &= \\
d(5) &=
\end{aligned}
$$

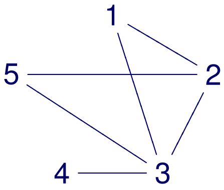
Stupeň vrcholu

Definice (Stupeň vrcholu)

Stupeň vrcholu u v grafu G je počet hran vycházejících z u. Stupeň vrcholu značíme $d_G(u)$ nebo jen $d(u)$.

Příklad

- Zjistěte stupně vrcholů.



$$
\begin{aligned}
d(1) &= 2\\
d(2) &= 3\\
d(3) &= 4\\
d(4) &= 1\\
d(5) &= 2
\end{aligned}
$$

- Stupně vrcholů můžeme uspořádat podle velikosti: $1, 2, 2, 3, 4$

Vlastnosti stupňů

Věta

Součet stupňů vrcholů v libovolném grafu je vždy sudý a rovný dvojnásobku počtu hran.

Důkaz

Každá hrana vychází ze dvou uzlů a je tedy započítaná dvakrát do součtu stupňů. □

Havlova-Hakimiho věta

Věta (Havlova-Hakimiho věta)

Nechť $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ *jsou nezáporná celá čísla. Existuje graf s* n *vrcholy stupňů* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *právě tehdy, když existuje graf s* $n-1$ *vrcholy stupňů*

$$d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-2}, d_{n-d_n-1} - 1, d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1.$$

Upravené stupně vrcholů odpovídají tomu, že jsme odstranili vrchol s maximálním stupněm, z nehož vedlo d_n hran do vrcholů s nejvyššími stupni.

Havlova-Hakimiho věta

Věta (Havlova-Hakimiho věta)

Nechť $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ jsou nezáporná celá čísla. Existuje graf s n vrcholy stupňů $d_1, d_2, \ldots, d_n$ právě tehdy, když existuje graf s $n-1$ vrcholy stupňů

$$d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-2}, d_{n-d_n-1}-1, d_{n-d_n}-1, \ldots, d_{n-2}-1, d_{n-1}-1.$$

Důkaz

"$\Longleftarrow$" Nechť existuje graf s $n-1$ vrcholy, které mají stupně

$$d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-2}, d_{n-d_n-1}-1, d_{n-d_n}-1, \ldots, d_{n-1}-1.$$

Pokud k tomuto grafu přidáme jeden uzel, z kterého povedou hrany do d_n vrcholů, které odpovídají posledním d_n stupňům v uvedené posloupnosti, získáme graf s n vrcholy, které mají stupně $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Havlova-Hakimiho věta

Věta (Havlova-Hakimiho věta)

Nechť $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ *jsou nezáporná celá čísla. Existuje graf s* n *vrcholy stupňů* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *právě tehdy, když existuje graf s* $n-1$ *vrcholy stupňů*

$$d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-2}, d_{n-d_n-1}-1, d_{n-d_n}-1, \ldots, d_{n-2}-1, d_{n-1}-1.$$

Důkaz

"$\Longrightarrow$" Tvrzení je zřejmé, pokud z vrcholu w se stupněm d_n vedou hrany do d_n vrcholů s dalšími nejvyššími stupni. …

Havlova-Hakimiho věta

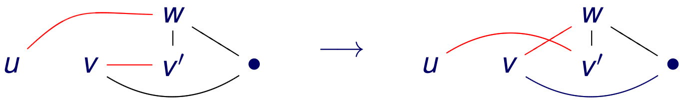
Věta (Havlova-Hakimiho věta)

Nechť $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ jsou nezáporná celá čísla. Existuje graf s n vrcholy stupňů $d_1, d_2, \ldots, d_n$ právě tehdy, když existuje graf s $n-1$ vrcholy stupňů

$$d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-2}, d_{n-d_n-1} - 1, d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1.$$

Důkaz

"$\Longrightarrow$" ... V opačném případě existují uzly u, v se stupni $d(u) < d(v)$ takové, že existuje hrana $\{u, w\}$, ale neexistuje hrana $\{v, w\}$. Pak existuje i hrana $\{v, v'\}$, kde $v' \neq u$. Hrany $\{u, w\}, \{v, v'\}$ nahradíme hranami $\{u, v'\}, \{v, w\}$. Upravený graf má stejné stupně vrcholů.



Postup opakujeme až získáme graf, pro nějž je tvrzení zřejmé. □

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 2, 3, 4$?

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 2, 3, 4$?
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $1, 0, 0, 1, 2$.

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 2, 3, 4$?
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $1, 0, 0, 1, 2$.
- Po seřazení stupňů řešíme existenci grafu se stupni $0, 0, 1, 1, 2$.

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 2, 3, 4$?
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $1, 0, 0, 1, 2$.
- Po seřazení stupňů řešíme existenci grafu se stupni $0, 0, 1, 1, 2$.
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $0, 0, 0, 0$.

Vlastnosti stupňů

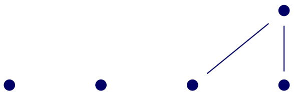
Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 2, 3, 4$?
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $1, 0, 0, 1, 2$.
- Po seřazení stupňů řešíme existenci grafu se stupni $0, 0, 1, 1, 2$.
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $0, 0, 0, 0$.
- Takový graf zjevně existuje.

$0, 0, 0, 0$

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 2, 3, 4$?
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $1, 0, 0, 1, 2$.
- Po seřazení stupňů řešíme existenci grafu se stupni $0, 0, 1, 1, 2$.
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $0, 0, 0, 0$.
- Takový graf zjevně existuje.
- Postupně ho doplníme na původně požadovaný graf.

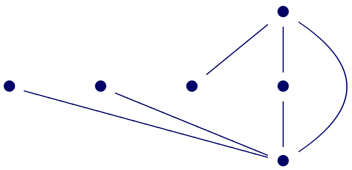


$0, 0, 1, 1, 2$

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 2, 3, 4$?
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $1, 0, 0, 1, 2$.
- Po seřazení stupňů řešíme existenci grafu se stupni $0, 0, 1, 1, 2$.
- Dle věty je to ekvivalentní existenci grafu se stupni $0, 0, 0, 0$.
- Takový graf zjevně existuje.
- Postupně ho doplníme na původně požadovaný graf.



$1, 1, 1, 2, 3, 4$

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$?

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$?
- Právě když existuje graf se stupni $1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 5$.

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$?
- Právě když existuje graf se stupni $1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 5$.
- Právě když existuje graf se stupni $0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5$.

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$?
- Právě když existuje graf se stupni $1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 5$.
- Právě když existuje graf se stupni $0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5$.
- Právě když existuje graf se stupni $-1, 0, 0, 0, 0, 1, 2$.

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$?
- Právě když existuje graf se stupni $1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 5$.
- Právě když existuje graf se stupni $0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5$.
- Právě když existuje graf se stupni $-1, 0, 0, 0, 0, 1, 2$.
- Takový graf zjevně neexistuje.

Vlastnosti stupňů

Příklad

- Existuje graf se stupni vrcholů $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$?
- Právě když existuje graf se stupni $1, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 5$.
- Právě když existuje graf se stupni $0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 5$.
- Právě když existuje graf se stupni $-1, 0, 0, 0, 0, 1, 2$.
- Takový graf zjevně neexistuje.
- Neexistuje tedy ani graf se stupni $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7$.

Podgrafy

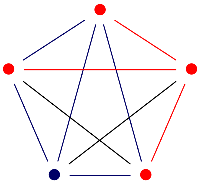
Definice (Podgraf a indukovaný podgraf)

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ je libovolný graf $H = (V', E')$ takový, že $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a přitom hrany v E' vedou pouze mezi vrcholy ve V'.

Podgraf $H = (V', E')$ grafu G je indukovaný (množinou vrcholů V'), jestliže množina jeho hran E' obsahuje všechny hrany z E vedoucí mezi vrcholy z V'.

Příklad

- H je podgraf, ale není indukovaný.



Podgrafy

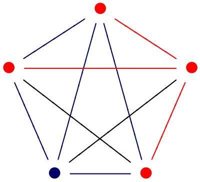
Definice (Podgraf a indukovaný podgraf)

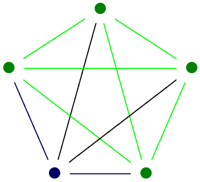
Podgrafem grafu $G = (V, E)$ je libovolný graf $H = (V', E')$ takový, že $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a přitom hrany v E' vedou pouze mezi vrcholy ve V'.

Podgraf $H = (V', E')$ grafu G je indukovaný (množinou vrcholů V'), jestliže množina jeho hran E' obsahuje všechny hrany z E vedoucí mezi vrcholy z V'.

Příklad

- H je podgraf, ale není indukovaný.
- H' je indukovaný podgraf.





Izomorfismus grafů

Intuitivně: grafy jsou izomorfní, pokud se liší pouze pojmenováním vrcholů (a/nebo jejich rozmístěním).

Definice (Izomorfismus grafů)

Grafy $G = (V, E)$ *a* $H = (V', E')$ *jsou izomorfní, píšeme* $G \simeq H$*, pokud existuje bijekce* $f : V \to V'$ *taková, že pro každé dva vrcholy* $u, v \in V$ *platí*

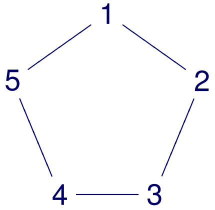
$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

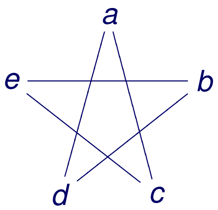
Bijekci f *pak nazýváme izomorfismus.*

Izomorfismus grafů

Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.

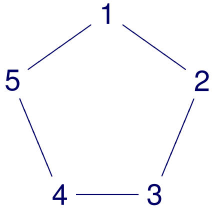


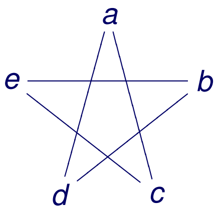


Izomorfismus grafů

Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.
- Ano, jsou.

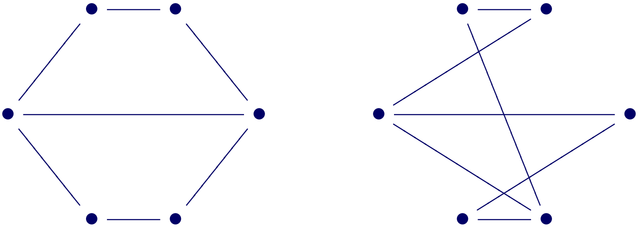




$$
\begin{aligned}
f(1) &= a\\
f(2) &= c\\
f(3) &= e\\
f(4) &= b\\
f(5) &= d
\end{aligned}
$$

Příklad

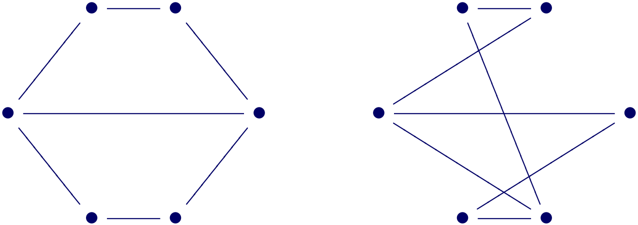
- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.



Izomorfismus grafů

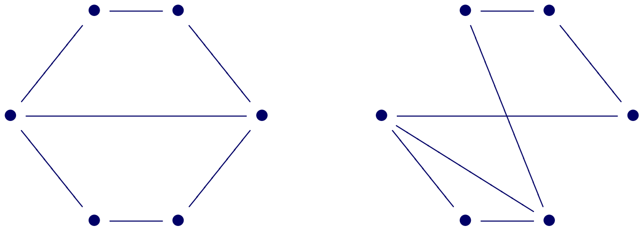
Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.
- Ano, jsou.



Příklad

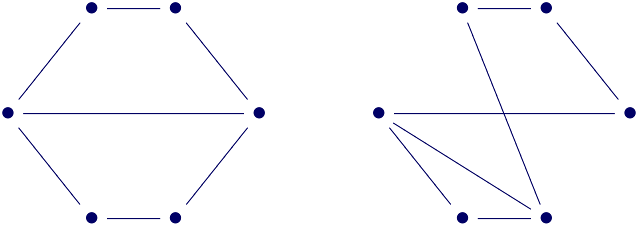
- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.



Izomorfismus grafů

Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.
- Ne, nejsou.



Kružnice, cesta a klika v grafu

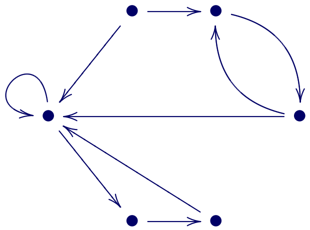
Definice (Kružnice, cesta a klika v grafu)

Podgraf H grafu G se nazývá

- *kružnice v G, je-li izomorfní nějaké kružnici.*
- *cesta v G, je-li izomorfní nějaké cestě.*
- *klika v G, je-li izomorfní nějakému úplnému grafu.*

Orientované grafy

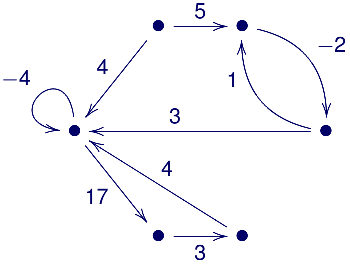
- Hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.
- Hrana (u, v) začíná v uzlu u a vede do uzlu v.
- Hrana (u, v) se graficky značí $u \longrightarrow v$.
- Hrana (u, u) se nazývá *smyčka*.



Další typy grafů

Ohodnocené grafy

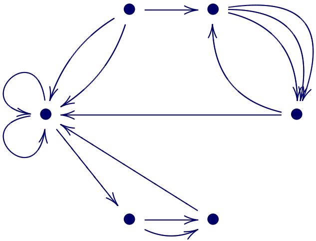
- Graf je rozšířen o funkci $h : H \to \mathbb{R}$ přiřazující hranám čísla.
- V grafické reprezentaci se přiřazená čísla napíší k hranám.
- Ohodnocené grafy mohou být orientované i neorientované.



Další typy grafů

Multigrafy

- V multigrafu může být více různých hran vedoucích mezi stejnými uzly.
- Multigrafy mohou být ohodnocené i neohodnocené, orientované i neorientované.



Znalosti z IB111

Z předmětu IB111 Programování a algoritmizace znáte

- způsoby reprezentace grafu v počítačí
  - matice sousednosti
  - pole ukazatelů na seznamy sousedů
  - ...
- algoritmy
  - procházení grafu do šířky
  - procházení grafu do hloubky
  - nejkratší cesty
  - nalezení (minimální) kostry grafu
- Eulerovské grafy (nakreslitelné jedním tahem)

Souvislost grafu

Sled

Budeme uvažovat neorientované grafy.

Definice (Sled)

Sled délky n v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

ve které pro každou hranu e_i platí $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Věta

Na vrcholech grafu G definujeme binární relaci $\sim$ takto:

$$u \sim v \iff \text{existuje sled začínající v } u \text{ a končící ve } v$$

Relace $\sim$ je ekvivalence.

Souvislost grafu

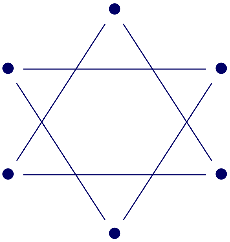
Definice (Souvislé komponenty, souvislý graf)

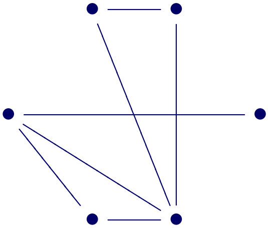
Třídy ekvivalence $\sim$ se nazývají souvislé komponenty.
Jsou-li každé dva vrcholy grafu v relaci $\sim$, pak je graf souvislý.

- Souvislé komponenty jsou definovány jako množiny vrcholů. Často se pod tímto názvem ale myslí podgrafy indukované těmito množinami vrcholů.
- Graf je souvislý, právě když má jedinou souvislou komponentu.

Příklad

- Určete, keré z následujících grafů jsou souvislé. Určete počet komponent.

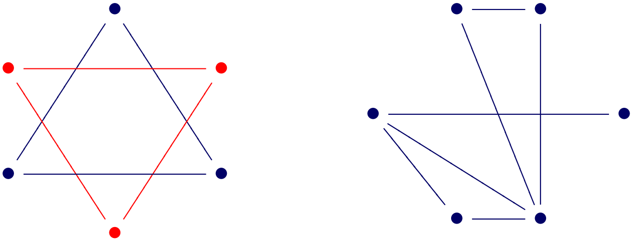




Souvislost grafu

Příklad

- Určete, keré z následujících grafů jsou souvislé. Určete počet komponent.



- Levý graf má dvě souvislé komponenty, není tedy souvislý.
- Pravý graf má jednu souvislou komponentnu, je souvislý.

Vyšší stupně souvislosti

Definice

Nechť $k > 1$*. Graf* G *je* ***hranově*** k***-souvislý****, je-li souvislý i po odebrání libovolných* $k - 1$ *hran.*

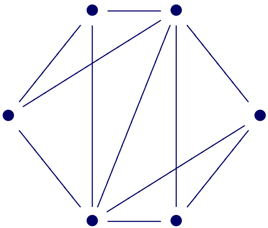
Graf G *je* ***vrcholově*** k***-souvislý****, je-li souvislý i po odebrání libovolných* $k - 1$ *vrcholů.*

- Jedná se o prakticky motivované pojmy.
- Chceme kupříkladu vědět, kolik úseků elektrického vedení se může zpřetrhat než v nějakém místě sítě dojde k výpadku (hranová souvislost).
- Podobně vrcholová souvislost například říká, kolik serverů může zkolabovat aniž by byl narušen provoz zbytku sítě.

Vyšší stupně souvislosti

Příklad

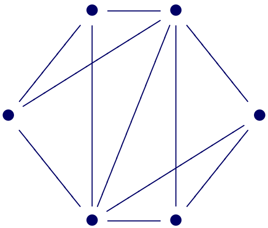
- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:



Vyšší stupně souvislosti

Příklad

- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:

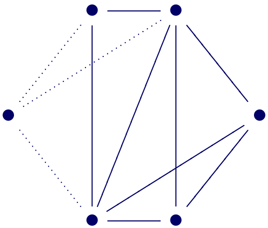


- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?

Vyšší stupně souvislosti

Příklad

- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:

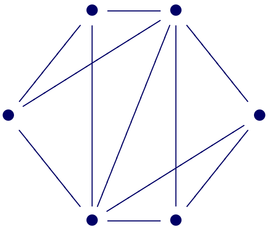


- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?

Vyšší stupně souvislosti

Příklad

- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:

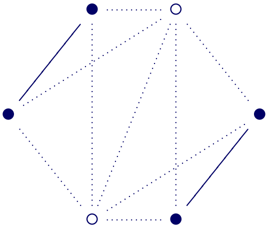


- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?
- Vrcholová souvislost je 2. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 2 vrcholů. Kterých?

Vyšší stupně souvislosti

Příklad

- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:



- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?
- Vrcholová souvislost je 2. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 2 vrcholů. Kterých?

Mengerova věta

Věta (Mengerova věta)

Graf G je hranově k-souvislý právě když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje alespoň k hranově disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).

Graf G je vrcholově k-souvislý právě když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje alespoň k disjunktních cest (různých až na dva spojované vrcholy).

Stromy

Les a strom

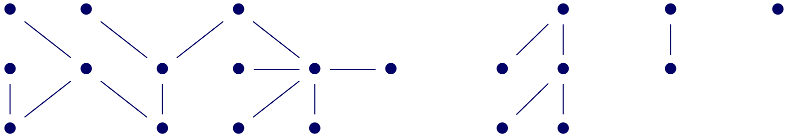
Budeme uvažovat neorientované grafy. Stromy i lesy lze definovat i na orientovaných grafech.

Definice (Les,strom)

Les je graf bez kružnic.

Strom je souvislý graf bez kružnic.

Příklad



Les a strom

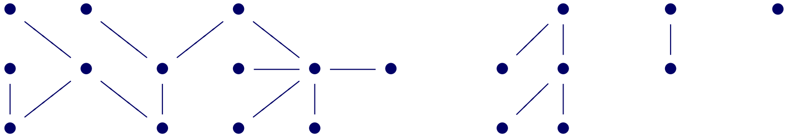
Budeme uvažovat neorientované grafy. Stromy i lesy lze definovat i na orientovaných grafech.

Definice (Les,strom)

Les je graf bez kružnic.

Strom je souvislý graf bez kružnic.

Příklad



Čtyři stromy. Nebo les?

Vlastnosti stromů

Lemma

Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jedna cesta.

Důkaz

- Existence cesty mezi každými dvěma uzly plyne ze souvislosti.
- Kdyby mezi nějakými dvěmi uzly vedly alespoň dvě cesty, musel by graf obsahovat kružnici. $\square$

Vlastnosti stromů

Lemma

Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jedna cesta.

Důkaz

- Existence cesty mezi každými dvěma uzly plyne ze souvislosti.
- Kdyby mezi nějakými dvěmi uzly vedly alespoň dvě cesty, musel by graf obsahovat kružnici. □

Lemma

Přidáme-li do stromu jednu hranu, vznikne právě jedna kružnice.

Důkaz

- Aby přidáním hrany $\{u, v\}$ vznikly alespoň dvě kružnice, musí mezi u a v vést alespoň dvě cesty. A to nelze. □

Vlastnosti stromů

Lemma

Strom s více než jedním vrcholem má nějaký vrchol stupně 1.

Důkaz

- V grafu najdeme sled maximální délky, ve kterém se uzly neopakují.
- Graf má více než jeden uzel, délka sledu je proto alespoň 1.
- Stupeň posledního uzlu sledu je alespoň 1.
- Kdyby měl poslední uzel stupeň větší než 1, šel by sled prodloužit o uzel, který ve sledu ještě není (graf je necyklický).
- Poslední uzel sledu má tedy stupeň 1. $\square$

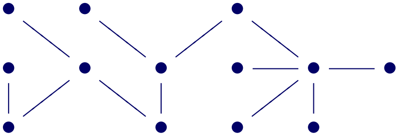
List

Definice (List)

List je vrchol stromu se stupněm 1.

Příklad

- Kolik má tento strom listů?



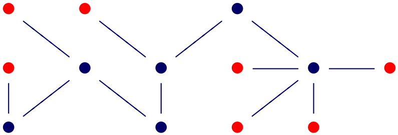
List

Definice (List)

List je vrchol stromu se stupněm 1.

Příklad

- Kolik má tento strom listů?
- Sedm (list = ●).

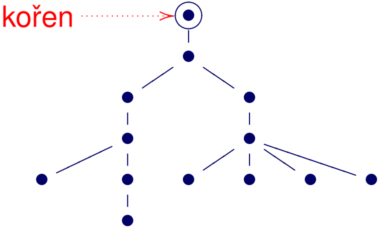


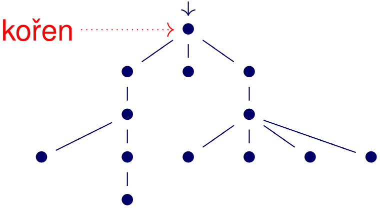
Kořenový strom

Definice (Kořenový strom)

Kořenový strom je dvojice (T, r)*, kde* T *je strom a* r *je jeho vrchol zvaný kořen.*

- Kořenové stromy kreslíme zpravidla od kořene směrem dolů.
- Kořen obvykle nenazýváme listem, i když má stupeň 1.
- Pod pojmem *strom* často myslíme právě kořenový strom.
- Kořen se značí různě nebo se pozná právě tím, že je nejvýš.



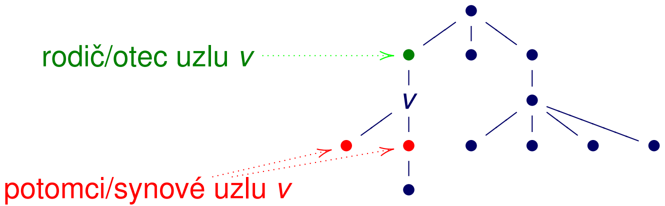


Terminologie

Definice

Nechť (T, r) je kořenový strom a v je jeho uzel. Nechť u je předposlední uzel na cestě z kořene r do v. Pak u se nazývá rodič uzlu v a v se nazývá potomek uzlu u.

- Místo pojmů *rodič* a *potomek* se také říká *otec* a *syn*.



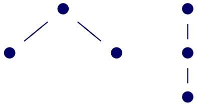
Izomorfismus stromů

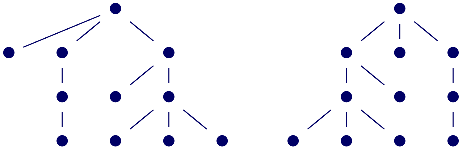
Definice

Kořenové stromy (T, r) *a* (T', r') *jsou izomorfní, pokud existuje izomorfismus mezi grafy* T *a* T' *takový, že kořen* r *je zobrazen na kořen* r'.

Příklad

- Grafy vlevo jsou izomorfní, ale pokud je chápeme jako kořenové stromy, tak izomorfní nejsou.
- Kořenové stromy vpravo jsou izomorfní.



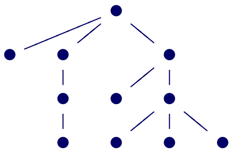


Uspořádaný strom

Definice (Uspořádaný strom)

Kořenový strom (T, r) je uspořádaný, pokud je pro každý vrchol stromu jednoznačně dáno pořadí jeho potomků.

- V grafické podobě je uspořádání dáno pořadím nakreslení potomků.



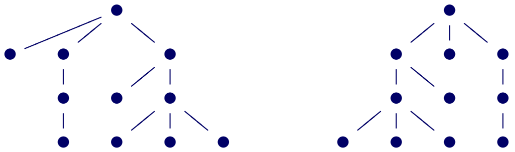
Izomorfismus uspořádaných stromů

Definice (Izomorfismus uspořádaných stromů)

Dva uspořádané kořenové stromy jsou izomorfní, pokud mezi nimi existuje izomorfismus f kořenových stromů, který zachovává pořadí potomků (tj. má-li uzel u potomky pořadě $v_1, v_2, \ldots, v_n$, pak $f(u)$ musí mít potomky pořadě $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$).

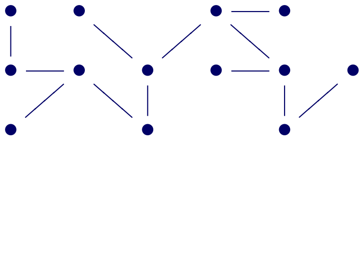
Příklad

- Uvedené uspořádané stromy nejsou izomorfní.



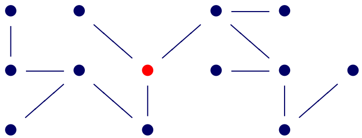
Příklad

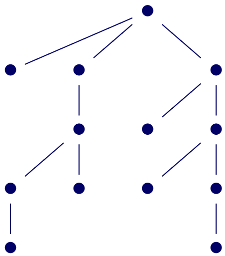
- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?



Příklad

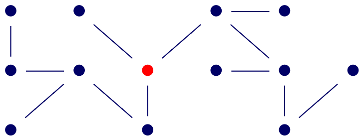
- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?
- Ano, lze.

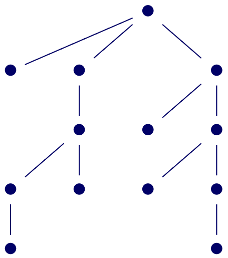




Příklad

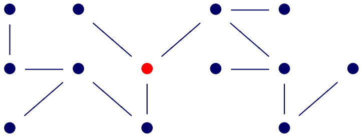
- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?
- Ano, lze.
- Budou vzniklé uspořádané kořenové stromy izomorfní?

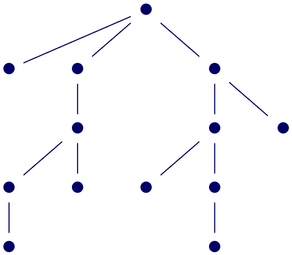




Příklad

- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?
- Ano, lze.
- Budou vzniklé uspořádané kořenové stromy izomorfní?
- Ne. Tradiční zobrazení levého uspořádaného kořenového stromu vypadá takto:





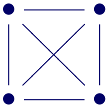
Kostra grafu

Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme kostrou, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4?

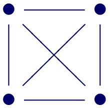


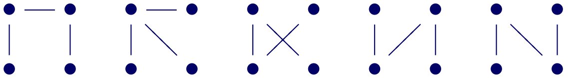
Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme kostrou, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4? Celkem 16.





$4x$ $4x$ $4x$ $2x$ $2x$

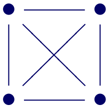
Kostra grafu

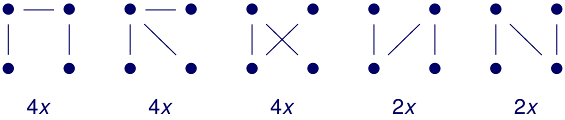
Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme kostrou, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4? Celkem 16.
- Jaká bude odpověď, kdybych počítal všechny izomorfní kostry jako jednu?





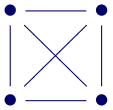
Kostra grafu

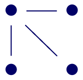
Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme kostrou, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4? Celkem 16.
- Jaká bude odpověď, kdybych počítal všechny izomorfní kostry jako jednu? Pouze 2.





Toky v sítích

Sítě

Definice (Síť)

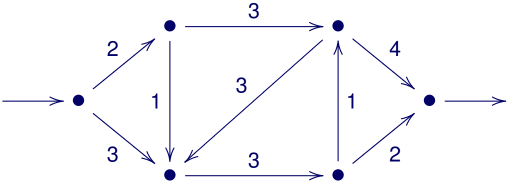
Síť je čtveřice (G, z, s, w)*, kde*

- G *je orientovaný graf,*
- $z, s \in V(G)$ *jsou vrcholy* G *zvané zdroj* (z) *a stok* (s)*,*
- $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$ *je kladné ohodnocení hran zvané kapacita hran.*

- Sítěmi se modelují situace, kdy přepravujeme nějaký materiál pomocí daného systému cest (vodovodní potrubí, plynovod, dopravní síť, internet, atd.).
- Zpravidla nás zajíma, kolik nejvíc materiálu lze přepravovat pomocí dané sítě od zdroje ke stoku.

Grafické znázornění sítě

- Síť (G, z, s, w) znázorňujeme jako ohodnocený orientovaný graf (G, w), kde označíme zdroj a stok (například šipkami do uzlu a z uzlu).



Tok v síti

- Tok v síti formalizuje momentální proudění materiálu od zdroje ke stoku.
- Velikost toku je celkové množství materiálu přepravovaného od zdroje ke stoku.
- Pro zjednodušení zápisu budeme psát
  $e \to v$ ve smyslu "hrana e vedoucí do v" a
  $e \leftarrow v$ ve smyslu "hrana e vedoucí z v" a

Definice (Tok, velikost toku)

Tok v síti (G, z, s, w) *je funkce* $f : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$ *splňující*

- *pro všechny hrany* $e \in E(G)$ *platí* $0 \leq f(e) \leq w(e)$,
- *pro každý vrchol* $v \in V(G) \setminus \{z, s\}$ *platí* $\sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$.

Velikost toku je definována jako $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e)$.

Poznámky k definici toku

Definice (Tok, velikost toku)

Tok v síti (G, z, s, w) je funkce $f : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$ splňující

- *pro všechny hrany $e \in E(G)$ platí $0 \leq f(e) \leq w(e)$,*
- *pro každý vrchol $v \in V(G) \setminus \{z, s\}$ platí $\sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$.*

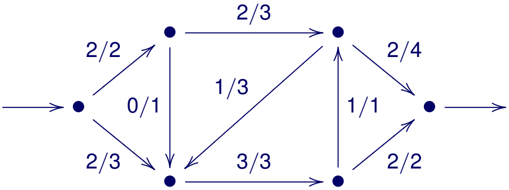
Velikost toku je definována jako $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e)$.

- První podmínka říká, že tok nesmí překročit kapacitu žádné hrany.
- Druhá podmínka říká, že není-li vrchol zdroj nebo stok, pak z něj musí odtéct tolik materiálu, kolik do něj přitéká.
- Velikost toku se definuje jako množství materiálu odtékajícího ze zdroje po odečtení materiálu, který do zdroje přitéká.
- Velikost toku lze alternativně definovat i u stoku.

Grafické znázornění toku v síti

- Tok v síti znázorňujeme stejně jako síť, akorát ohodnocení každé hrany e bude mít tvar $f(e)/w(e)$, tedy *tok/kapacita*.

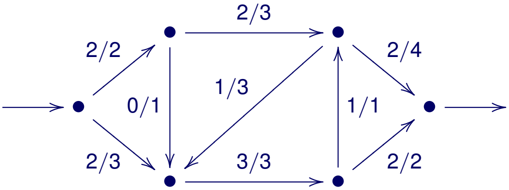
Příklad



Grafické znázornění toku v síti

- Tok v síti znázorňujeme stejně jako síť, akorát ohodnocení každé hrany e bude mít tvar $f(e)/w(e)$, tedy *tok/kapacita*.

Příklad

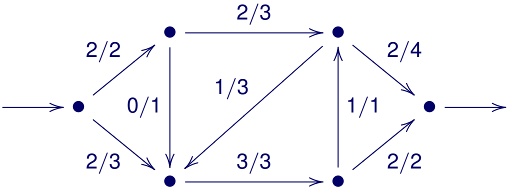


- Jaká je velikost toku?

Grafické znázornění toku v síti

- Tok v síti znázorňujeme stejně jako síť, akorát ohodnocení každé hrany *e* bude mít tvar $f(e)/w(e)$, tedy *tok/kapacita*.

Příklad



- Jaká je velikost toku?
- Velikost je 4.

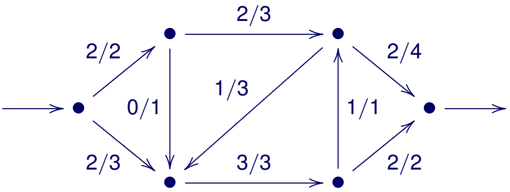
Problém maximálního toku

Problém maximálního toku v síti

Nechť (G, z, s, w) je síť. Problémem maximálního toku v síti rozumíme úkol nalézt v dané síti tok f s maximální možnou velikostí $\|f\|$.

Příklad

- Je vyznačený tok maximální?



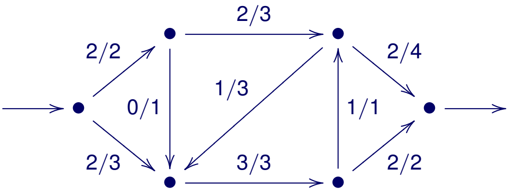
Problém maximálního toku

Problém maximálního toku v síti

Nechť (G, z, s, w) je síť. Problémem maximálního toku v síti rozumíme úkol nalézt v dané síti tok f s maximální možnou velikostí $\|f\|$.

Příklad

- Je vyznačený tok maximální?
- Není. Najděte maximální tok.



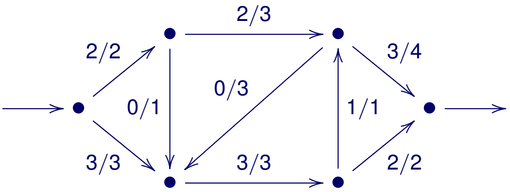
Problém maximálního toku

Problém maximálního toku v síti

Nechť (G, z, s, w) je síť. Problémem maximálního toku v síti rozumíme úkol nalézt v dané síti tok f s maximální možnou velikostí $\|f\|$.

Příklad

- Je vyznačený tok maximální?
- Není. Najděte maximální tok.
- Umíte dokázat, že je velikost toku je maximální?



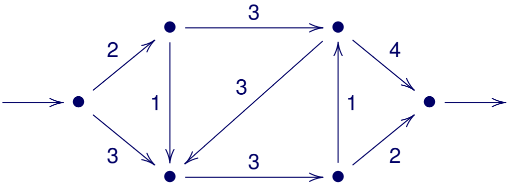
Řez v síti

Definice (Řez, velikost řezu)

Řez v síti (G, z, s, w) je podmnožina hran $C \subseteq E(G)$ taková, že po jejich odstranění z grafu G neexistuje orientovaná cesta ze z do s. Velikost řezu C je součet kapacit hran v C, tedy $\|C\| = \sum_{e \in C} w(e)$.

Příklad

- Nalezněte nějaký řez a určete jeho velikost.



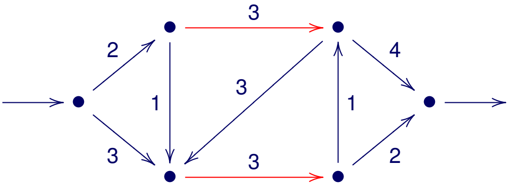
Řez v síti

Definice (Řez, velikost řezu)

Řez v síti (G, z, s, w) je podmnožina hran $C \subseteq E(G)$ taková, že po jejich odstranění z grafu G neexistuje orientovaná cesta ze z do s.
Velikost řezu C je součet kapacit hran v C, tedy $\|C\| = \sum_{e \in C} w(e)$.

Příklad

- Nalezněte nějaký řez a určete jeho velikost.
- Vyznačený řez má velikost 6.

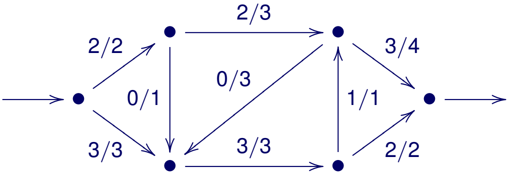


Vztah řezů a toků

Věta

Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.

- Intuitivně platí, že řez je množina hran, které nelze obejít žádnou cestou ze zdroje do stoku.
- Velikost libovolného řezu je tedy větší nebo rovna velikosti libovolného toku.
- K důkazu, že nalezený tok má maximální velikost, stačí nalézt řez stejné velikosti.
- Je daný tok v síti maximální?

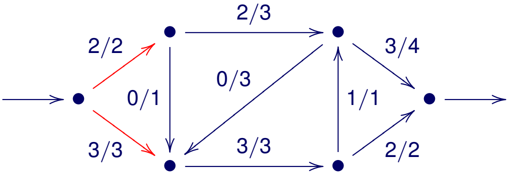


Vztah řezů a toků

Věta

Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.

- Intuitivně platí, že řez je množina hran, které nelze obejít žádnou cestou ze zdroje do stoku.
- Velikost libovolného řezu je tedy větší nebo rovna velikosti libovolného toku.
- K důkazu, že nalezený tok má maximální velikost, stačí nalézt řez stejné velikosti.
- Je daný tok v síti maximální?



Nenasycená cesta

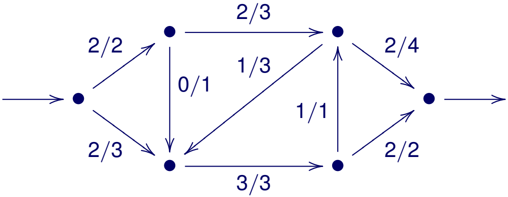
Definice (Nenasycená cesta)

Mějme síť (G, z, s, w) a v ní tok f. Nenasycená cesta z vrcholu u do vrcholu v je neoreintovaná cesta (tj. posloupnost navazujících hran $e_1, e_2, \dots, e_n$ chápaných neorientovaně) z u do v, kde pro všechny hrany e_i ve směru z u do v platí $f(e_i) < w(e_i)$ a pro všechny hrany e_i v opačném směru platí $f(e_i) > 0$.

- Po nenasycené cestě lze přepravit více materiálu z u do v.
- *Rezerva kapacity* pro hranu e_i ve směru z u do v je dána rozdílem $w(e_i) - f(e_i)$. Pro hranu v opačném směru je rezerva kapacity přímo $f(e_i)$.

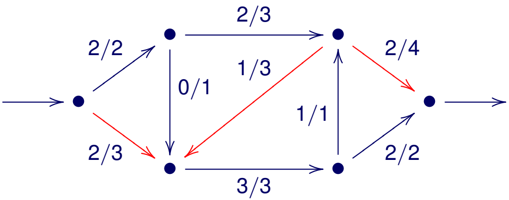
Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s?



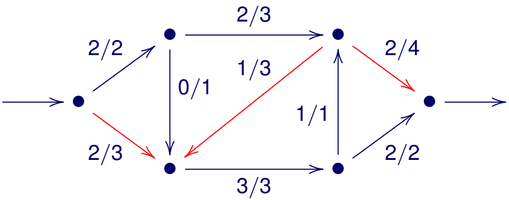
Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s?
- Ano.



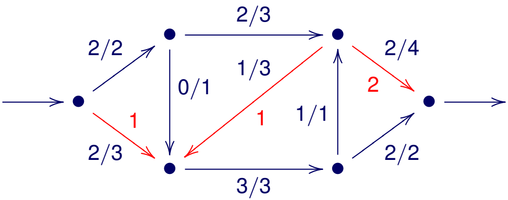
Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s?
- Ano.
- Určete rezervu kapacity jednotlivých hran.



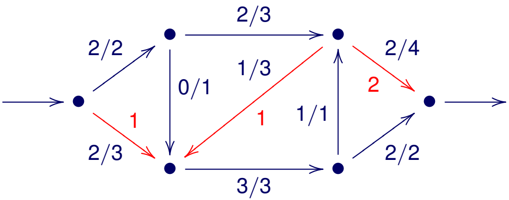
Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze *z* do *s*?
- Ano.
- Určete rezervu kapacity jednotlivých hran.



Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s?
- Ano.
- Určete rezervu kapacity jednotlivých hran.



- Tok v síti lze vždy zvýšit o minimální rezervu na nenasycené cestě ze zdroje do stoku.

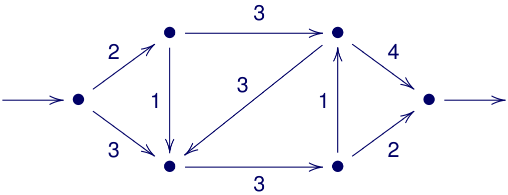
Ford-Fulkersonův algoritmus

Vstup: Síť (G, z, s, w)

pro všechny hrany $e \in E(G)$ nastav $f(e) = 0$
repeat
    najděme množinu U všech vrcholů,
    do kterých vedou nenasycené cesty ze z
    if $s \in U$ **then**
        tok na nalezené nenasycené cestě ze z do s zvýšíme
        o minimální rezervu kapacity hran na této cestě.
until $s \notin U$
na výstup vypíšeme získaný tok

Příklad

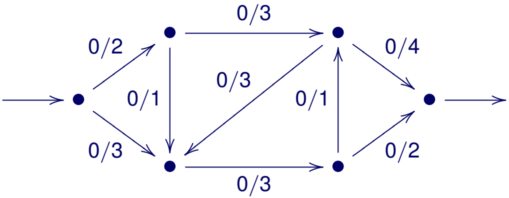
Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

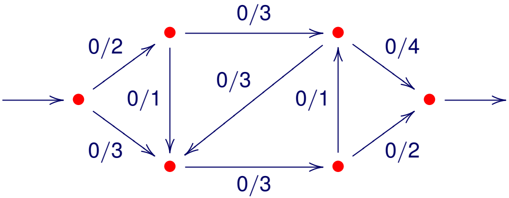
1. Inicializujeme tok na nulové hodnoty.



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

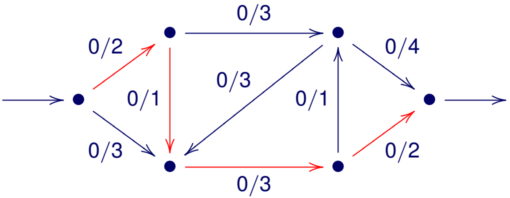
1. Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
2. Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze *z*.



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

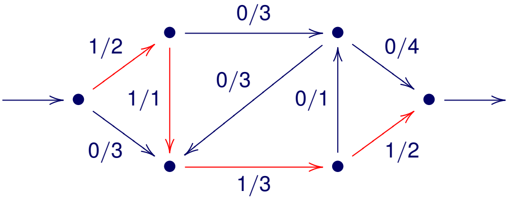
1. Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
2. Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze z.
3. Zvolíme nějakou nenasycenou cestu ze z do s.



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

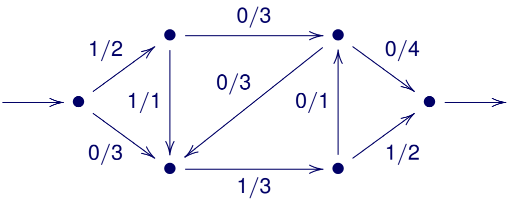
1. Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
2. Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze *z*.
3. Zvolíme nějakou nenasycenou cestu ze *z* do *s*.
4. Zvýšíme tok o minimální rezervu kapacity hran na cestě.



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

1. Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
2. Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze *z*.
3. Zvolíme nějakou nenasycenou cestu ze *z* do *s*.
4. Zvýšíme tok o minimální rezervu kapacity hran na cestě.
5. Kroky 2–4 opakujeme dokud je *s* v množině počítané krokem 2.



Poznámky

- Sítě lze snadno rozšířit i o kapacitu uzlů.
- Má smysl uvažovat i minimální kapacity hran, úloha je stále snadno řešitelná.
- Algoritmus pro nalezení maximálního toku má kromě zjevných technických aplikací i aplikace v matematice, např. pro nalezení párování v bipartitním grafu nebo pro určení vyšší grafové souvislosti.