10. demonstrační cvičení

Příklad 1. *Náhodná veličina X je dána pravděpodobnostní funkcí*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \textit{pro } x = -2 \\ \frac{1}{2} & \textit{pro } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \textit{pro } x = 1 \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Určete $E(X), E(2X+5), E(X^2), D(X)$ *a* $D(2X+1)$.

Příklad 2. *Nekorelované náhodné veličiny* X *a* Y *mají rozptyly* $D(X) = a$ *a* $D(Y) = 2$*. Určete konstantu* a*, jestliže roztpyl náhodné veličiny* $Z = 3Y - X$ *je* $D(Z) = 25$*.*

Příklad 3. *Náhodná veličina X má na intervalu $(0, a)$ konstantní hustotu pravděpodobnosti (a jinde nulovou). S využitím vlastností střední hodnoty a rozptylu určete:*

1. $E(2X + 3)$,
2. $E(3X^2 - 2X + 1)$,
3. $D(2X + 3)$,
4. $D(X^2 + 1)$,
5. *momentovou vytvořující funkci* $E(e^{tX})$ *náhodné veličiny* X.

Příklad 4. *Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení (tj. pravděpodobnostní funkci $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$). Určete její momentovou vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl.*

Příklad 5. *1. Dokažte Markovovu nerovnost*

$$P[X > \lambda] < \frac{EX}{\lambda}.$$

2. Z Markovovy nerovnosti odvoďte Čebyševovu nerovnost

$$P(|X - EX| \geq \epsilon) \leq \frac{DX}{\epsilon^2}.$$

3. Počet aut vjíždějících do křižovatky v určitém časovém intervalu se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 120. Určete dolní odhad pravděpodobnosti, že v tomto intervalu vjede do křižovatky 100 až 140 aut.

Příklad 6. *Nechť má* X *binomické rozdělení s parametry* $n = 4, p = 2/3$*. Určete rozdělení transformované náhodné veličiny* $Y = (X-2)^2$ *a nakreslete graf její distribuční funkce.*

Příklad 7. *Mějme náhodnou veličinu* X *hustoty* $f(x) = 2xe^{-x^2}$ *pro* $x > 0$ *(a jinde nulové). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny* $Y = X^2$.

Příklad 8. *Na výrobcích měříme délku s přesností* $\pm 0{,}5mm$ *a šířku s přesností* $\pm 0{,}2mm$. *Náhodná veličina* X *udává chybu při měření délky a* Y *chybu při měření šířky. Předpokládejme, že simultánní hustota pravděpodobnosti* $\varphi(x, y)$ *je uvnitř mezí chyb konstantní (a jinde samozřejmě nulová). Určete*

1. *tuto konstantu,*
2. *obě marginální hustoty pravděpodobnosti,*
3. *simultánní distribuční funkci,*
4. *obě marginální distribuční funkce,*
5. $P(-0{,}1 < X < 0{,}1)$,
6. *zda jsou* X *a* Y *stochasticky nezávislé.*