A

1. a) X_1, X_2 nezávislé ; $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,1)$

$$Y = -1 + 2X_1 + (-3X_2) \Rightarrow E(Y) = -1 + 2E(X_1) - 3E(X_2) = -1$$

$$\text{nezávislost} \Rightarrow D(Y) = 4D(X_1) + 9D(X_2) = 13$$

Proto $Y \sim N(-1, 13)$. Transformovaná veličina $\frac{Y-(-1)}{\sqrt{13}} \sim N(0,1)$,

proto pro dolní kvantil α platí $\frac{1}{4} = P(Y < \alpha) = P\left(\frac{Y+1}{\sqrt{13}} < \frac{\alpha+1}{\sqrt{13}}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{13}}\right) = \frac{1}{4}$,

kde Φ je distribuční funkce $N(0,1)$, tedy $\frac{\alpha+1}{\sqrt{13}} = -0{,}68 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -3{,}452}}$

Dále $E(X_1 \cdot Y) = E(X_1 \cdot (-1 + 2X_1 - 3X_2)) = E(-X_1) + 2E(X_1^2) - 3E(X_1 \cdot X_2) =$

$$= 0 + 2 - 3E(X_1)E(X_2) = 2.$$

neboť $E(X_1^2) - \underset{0}{E(X_1)^2} = D(X_1) = 1$, tj. $E(X_1^2) = 1$.

b) X_n … počet kartiček s požadovaným obrázkem ; n počet všech kartiček

$X_n \sim Bi(n, \underset{p}{\frac{1}{26}})$. Podle Moivre-Laplaceovy věty je $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ přibližně $N(0,1)$.

$$0{,}95 = P(X_n \geq 4), \text{ tj. } 0{,}05 = 1 - P(X_n \geq 4) = P(X_n < 4) = P\left(\frac{X_n - \frac{n}{26}}{\sqrt{n\frac{1}{26}\frac{25}{26}}} < \frac{4 - \frac{n}{26}}{\sqrt{n\frac{1}{26}\frac{25}{26}}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{104 - n}{5\sqrt{n}}\right), \text{ tj. } 0{,}95 = \Phi\left(\frac{n-104}{5\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{n-104}{5\sqrt{n}} = 1{,}65$$

$\Leftrightarrow n - 8{,}25\sqrt{n} - 104 = 0$, řešíme kvadratickou rovnici (substituce $t = \sqrt{n}$),

kladný kořen $t = 15{,}126 \Rightarrow n = t^2 = 228{,}79$.

Musí koupit aspoň 229 jogurtů.

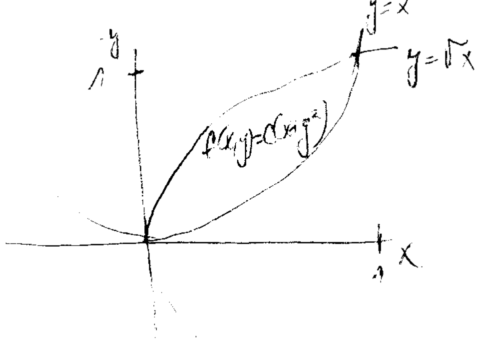
2. a) i) $2 \nmid n \Rightarrow$ jeden kořen $x = 1$; ii) stejně jako v $\mathbb{Z}$ iii) n kořenů
$2 \mid n \Rightarrow$ žádný kořen

b) a) $(x+3)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$

b) $(x+3)(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 = (x+3)(x^2 - x + \frac{3}{4})^2$

c) stejně jako b)

(3)



hustota $f(x,y)=c(x+y^2)$

Musí platit

$$1=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} c(x+y^2)\,dy\,dx = c\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{21}\right]_0^1 =$$

$$= c\cdot\frac{33}{140} \Rightarrow c=\frac{140}{33}.$$

$$E\mathbb{X}=(EX,EY), \quad EX = c\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\cdot(x+y^2)\,dy\,dx = c\cdot\frac{39}{280} = \frac{13}{22}.$$

$$EY = c\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} y(x+y^2)\,dx\,dy = c\cdot\frac{5}{36} = \frac{175}{297}$$

(B) 2011 MA104 - pís - 7.2.4

1\. a) X_1, X_2 <u>nezávislé</u> ; $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,1)$.

$$Y = +3 - 4X_1 + 5X_2 \Rightarrow E(Y) = 3 - 4E(X_1) + 5E(X_2) = 3$$

$$\text{nezávislost} \Rightarrow D(Y) = 16D(X_1) + 25D(X_2) = 41$$

Proto $Y \sim N(3, (\sqrt{41})^2) = N(3,41)$. Transformace $\frac{Y-3}{\sqrt{41}} \sim N(0,1)$,

proto pro horní kvartil α platí $\frac{3}{4} = P(Y < \alpha) = P\left(\frac{Y-3}{\sqrt{41}} < \frac{\alpha-3}{\sqrt{41}}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha-3}{\sqrt{41}}\right)$,

kde Φ je distr. fce $N(0,1)$. Tedy $\frac{\alpha-3}{\sqrt{41}} = 0{,}68 \Rightarrow \underline{\alpha \doteq 7{,}354}$

Dále $E(Y \cdot X_2) = E((3-4X_1+5X_2) \cdot X_2) = E(3X_2) - 4E(X_1 \cdot X_2) + 5E(X_2^2) =$

$$= 3E(X_2) - 4\underbrace{E(X_1) \cdot E(X_2)}_{\text{nezávislost!}} + 5E(X_2^2) = 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5,$$

neboť $1 = D(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2 = E(X_2^2) - 0^2$.

b) n konzerv, X_n počet <u>bezvadných</u> $\quad X_n \sim Bi(n; \overset{p}{0{,}9})$

Podle Moivre-Laplaceovy věty má $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ rozdělení přibližně $N(0,1)$.

$$0{,}95 = P(X_n \geq 80) \Leftrightarrow 0{,}05 = P(X_n < 80) = P\left(\underbrace{\frac{X_n - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}}_{\sim N(0,1)} < \frac{80 - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{n \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{80 - n \cdot 0{,}9}{\sqrt{n \cdot 0{,}09}}\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{80 - 0{,}9n}{0{,}3\sqrt{n}} = -1{,}65$, tj. řešíme kvadratickou rovnici (subst. $t = \sqrt{n}$)

$0{,}9t^2 - 0{,}495t - 80 = 0$, kladné řešení je $t \doteq 9{,}701$.

Tedy $n \doteq 94{,}23$. Musí vzít alespoň 95 konzerv.

2\.

a) $(x^2+1)(x^2+2)$

b) každý nekonstantní, např. x

c) a) $(x+1)(x-2-\frac{3}{2}i)^2$

b) $(x+1)(x-2-\frac{3}{2}i)^2(x-2+\frac{3}{2}i)^2 = (x+1)(x^2-4x+\frac{25}{4})^2$

c) stejný jako v b)

(3) Jde o diskrétní náhodný vektor o pravděpodobnostní funkcí

$$p(x,y) = P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{4}{x}\cdot\binom{5}{y}\cdot\binom{6}{7-x-y}}{\binom{15}{7}} \quad \text{pro } x \in \{0,1,2,3,4\},\ y \in \{0,1,2,3,4,5\} \text{ a } 1 \le x+y \le 7$$

$$= 0 \quad \text{jinak}$$

Marginální

$$P_X(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{11}{7-x}}{\binom{15}{7}} \quad \text{pro } x \in \{0,1,2,3,4\}$$

$$= 0 \quad \text{jinak}$$

$$P_Y(y) = \frac{\binom{5}{y}\binom{10}{7-y}}{\binom{15}{7}} \quad \text{pro } y \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$= 0 \quad \text{jinak}$$

$$P(X \le 3) = 1 - P(X=4) = 1 - \frac{\binom{11}{3}}{\binom{15}{7}} \doteq \underline{0{,}974}$$

$$P(1 \le Y \le 4) = \frac{1}{\binom{15}{7}} \cdot \sum_{y=1}^{4} \binom{5}{y}\binom{10}{7-y} = 1 - \left(P_Y(0) + P_Y(5)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\binom{15}{7}}\left(\binom{10}{7} + \binom{10}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\binom{15}{7}}\left(\binom{10}{3} + \binom{10}{2}\right) = 1 - \frac{\binom{11}{3}}{\binom{15}{7}} \doteq \underline{0{,}974}$$