PA081: Programování numerických výpočtů

3. Nelineární rovnice o jedné neznámé praktické příklady

Aleš Křenek

jaro 2011

Montáž ložiska

K sestavení kluzného ložiska uložení ocelové mostní konstrukce je třeba na místě zasunout čep o vnějším průměru 313 mm do náboje o stejném vnitřním průměru.

Sestavení probíhá s podchlazeným čepem, díky tepelné roztažnosti materiálu je menší a ložisko lze sestavit. Bezpečné zmenšení průměru je 0.37 mm.

Na jakou teplotu je třeba čep podchladit, předpokládáme-li teplotu prostředí 20°C?

Montáž ložiska

- koeficient tepelné roztažnosti oceli α závisí na teplotě
  - výpočet tedy není zcela triviální
- v rozmezí $\pm 200°$C je poměrně přesně vyjádřen funkcí

$$\alpha(T) = aT^2 + bT + C$$

kde $a = -8.27 \times 10^{-11}, b = 2.21 \times 10^{-8}, c = 1.17 \times 10^{-5}$

  - koeficienty získány regresí (proložením křivky) experimentálních dat
  - metodu regrese budeme probírat později

Montáž ložiska

- poloměr po zchlazení počítáme pro $\Delta T \to 0$

$$
\begin{aligned}
r_x &= r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0))(1 - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T)) \ldots \\
&= r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0) - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T) \\
&\qquad + (\Delta T)^2 \alpha(T_0)\alpha(T_0 - \Delta T)) \ldots
\end{aligned}
$$

- vedlo by na netriviální diferenciální rovnici
- protože $\alpha(T) \ll 1$, $\Delta T \ll 1$, lze nelineární členy zanedbat
- dostáváme zjednodušení

$$
r_x = r_0(1 - \hat{\alpha}(T_x)) \qquad \text{kde} \qquad \hat{\alpha}(T_x) = \int_{T_x}^{T_0} \alpha(T)dT
$$

a budeme řešit rovnici

$$
\hat{\alpha}(T_x) = \frac{r_0 - r_x}{r_0}
$$

Montáž ložiska

- řešená funkce

$$f(T_x) = \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[\frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT\right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$
$$= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$

- potřebujeme
  - separaci „správného“ kořene
  - zvolit vhodnou numerickou metodu

Montáž ložiska

- řešená funkce

$$f(T_x) = \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[\frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT\right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$
$$= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$

- potřebujeme
  - separaci „správného“ kořene
  - zvolit vhodnou numerickou metodu
- koeficient u T_x^3 je kladný (a bylo záporné)
  - pro $T_x \to \infty$ také $f(T_x) \to \infty$
  - pro $T_x \to -\infty$ také $f(T_x) \to -\infty$

Montáž ložiska

- derivace řešené funkce

$$f'(T_x) = -aT_x^2 - bT_x - c$$

- $f(T_x)$ má jedno lokální minimum a jedno maximum
  - v bodech, kde $f'(T_x) = 0$
  - numericky stabilní výpočet?
    - druhá přednáška ;-)
    - $b = -2.21 \times 10^{-8}$, $\sqrt{D} = 6.60 \times 10^{-8}$ je OK
  - při nepřesném určení by mohla Newtonova metoda zabloudit, viz dále
- vypočtené extrémy

$$\begin{aligned} T_1 &= -265.544 & f(T_1) &= 0.000867609 \\ T_2 &= 532.775 & f(T_2) &= -0.00614507 \end{aligned}$$

Montáž ložiska

- dva „nesmyslné“ kořeny $T_- < T_1$ a $T_+ > T_2$
  - nemají fyzikální význam
  - T_+ – čep se při vysokých teplotách začne smršťovat
  - T_- – při nízkých teplotách se začne znovu roztahovat
  - obojí důsledkem aplikace regresní křivky mimo rozsah hodnot, ze kterých byla určena
- skutečný kořen v intervalu $[T_1, T_2]$
- funkce je spojitá, kořen je právě jeden
  - dokonalá separace
- umíme jednoduše počítat derivaci
  - navíc je na (T_1, T_2) derivace nenulová
- Newtonova metoda je ideální

Montáž ložiska

- numerická stabilita výpočtu $f(T)$ a $f'(T)$
  - rozsah T řádově ve stovkách
  - členy polynomu v řádech 10^{-5}–10^{-2}
  - raději použijeme typ `double`
- potenciální problém Newtonovy metody $f'(T) \to 0$
  - nenastane díky známým vlastnostem funkce

Montáž ložiska

- Průběh výpočtu funkcí `rtnewt`
  - požadovaná absolutní přesnost 10^{-3}
  - nemá smysl více, vstupní data (koeficienty a, b, c) jsou méně přesné
  - a jak budeme při stavbě mostu chladit čep na takhle přesnou teplotu?

```
T           f(T)          f'(T)

133.615     -0.00263873   -1.31765e-05
-66.6454    -0.000221398  -9.85981e-06
-89.1       -8.66255e-06  -9.07435e-06
-90.0546    -1.68088e-08  -9.03911e-06
-90.0564    -6.3964e-14   -9.03904e-06
```

- v následujícím kroku už bylo dosaženo požadované přesnosti
- výsledek je -90.056°C

Cirkusové číslo

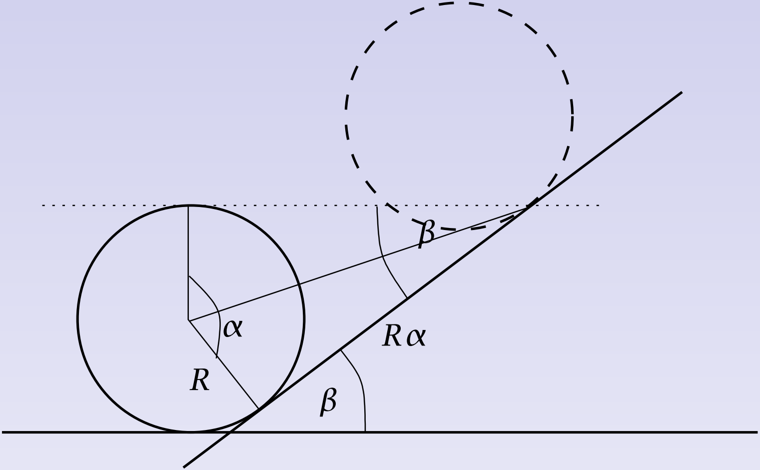
Artisté připravují nové vystoupení.

Na začátku se jeden z nich zachytí rukama i nohama v kruhové konstrukci o průměru 180 cm a další konstrukci vykoulí na plošinu.

Je třeba, aby se na konci tohoto pohybu původně nejvyšší bod kruhové konstrukce dotýkal plošiny a byl ve stejné výšce jako na začátku.

Jaká je potřebná délka a sklon plošiny?

Cirkusové číslo



Cirkusové číslo

- označíme
  - R – poloměr kruhu
  - α – úhel otočení kruhu (v radiánech)
  - β – úhel naklonění plošiny
- délka pohybu kruhu po plošině je $R\alpha$
- z naznačeného čtyřúhelníku odečteme
  - $\alpha + \beta = \pi$ (další dva úhly jsou pravé)
  - $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{R}{R\alpha}$
- z toho vyplývá řešená rovnice

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\pi - \beta} \qquad \text{tedy} \qquad f(\beta) = (\pi - \beta) \tan \frac{\beta}{2} - 1 = 0$$

Cirkusové číslo

- separace kořene
  - β je ostrý úhel, tj. $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$
  - řešení je právě jedno
  - z geometrické podstaty problému
  - formulací rovnic jsme nepřidali falešný kořen
  - dáme si práci s exaktním důkazem nebo to rovnou zkusíme
- pro jistotu ověříme

$$f(0) = -1 \qquad f(\pi/2) = 0.5707963$$

- numericky nebezpečná by byla až oblast $\beta \to \pi$
  - vedla by na součin typu $0 \cdot \infty$
  - pohybujeme se v bezpečné vzdálenosti
- budeme předstírat, že neumíme spočítat derivaci
- ukážeme metodu sečen, Riddersovu, a Brentovu

Cirkusové číslo

Metoda sečen, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

```
      n      beta          f(beta)
      1      +0.0000000    -1.0000000
      2      +1.5707963    +0.5707963
      3      +0.7853982    -0.0240323
      4      +1.1780972    +0.3119657
      5      +0.9817477    +0.1544612
      6      +0.8835729    +0.0679638
      7      +0.8344855    +0.0226702
      8      +0.8099419    -0.0005027
      9      +0.8222137    +0.0111281
...
     15      +0.8105171    +0.0000445
     16      +0.8104212    -0.0000467
```

- počínaje třetím krokem výpočet vždy ve středu intervalu
- pomalá konvergence

Cirkusové číslo

Riddersova metoda, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+0.7853982	-0.0240323
4	+0.8103685	-0.0000968
5	+1.1905824	+0.3213144
6	+0.8104702	-0.0000001
7	+1.0005263	+0.1704016
(8)	+0.8104702	

4. první iterační výpočet
5. půlení intervalu mezi 2. a 4.
6. další iterace
7. půlení mezi 5. a 6.
8. výsledek, už je v toleranci

Cirkusové číslo

Brentova metoda, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

```
n      beta         f(beta)
1      +0.0000000   -1.0000000
2      +1.5707963   +0.5707963
3      +1.0000000   +0.1699574
4      +0.7931377   -0.0165737
5      +0.8115179   +0.0009960
6      +0.8104759   +0.0000054
7      +0.8104259   -0.0000422
(8)    +0.8104759
```

- počítá primárním způsobem, nedošlo na bezpečné půlení intervalů
- srovnatelně rychlá konvergence s Riddersem
- při větší požadované přesnosti se liší ± o jeden krok

Cirkusové číslo

- všechny metody se v rámci požadované tolerance shodují
- rychlost konvergence dle očekávání
  - zdvojnásobení požadované přesnosti zdvojnásobí počet kroků půlení intervalů
  - Riddersova metoda naroste ze 7 na 9
  - Brentova dokonce jen ze 7 na 8
  - lepší výsledky než teoretická rychlost konvergence $\sqrt{2}$

Cirkusové číslo

- délka pohybu po plošině je

$$R\alpha = R(\pi - \beta) = 2.098$$

- zbývá spočítat část plošiny od země k bodu dotyku

$$\tan\frac{\pi - \beta}{2} = \frac{R}{l} \qquad \text{tedy} \qquad l = \frac{R}{\tan((\pi - \beta)/2)} = 0.3861$$

- nehrozí významné numerické nepřesnosti
- celková délka plošiny je 2.484 m, sklon 46.44°

Obchodní případ

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.
Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

Obchodní případ

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.
Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

- uvažované náklady
  - fixní jednorázové (pořízení vybavení): \$20000
  - fixní roční (nájem, web, ...): \$15000
  - variabilní (komponenty, hodinová sazba práce, ...): $\$625n$
  - semivariabilní (náročnější logistika atd.) $\$30n^{1.5}$
- předpokládané příjmy
  - prodej počítačů: $\$1500n$
  - slevy (množstevní, VIP zákazníci, ...): $-\$10n^{1.5}$

Obchodní případ

- řešená rovnice

$$f(n) = TC(n) - TS(n) = 35000 - 875n + 40n^{1.5} = 0$$

- první dva členy – lineární funkce
  - prochází bodem (0,35000)
  - osu x protíná v $35000/875 = 40$
- člen $40n^{1.5}$ způsobí „prohnutí" nahoru
  - posune kořen z bodu 40 dál
  - přidá druhý kořen pro vyšší n
- zisku dosahujeme v oblasti mezi těmito kořeny

Obchodní případ

- separace 1. kořene
  - podle předchozí úvahy $f(40) > 0$, skutečná hodnota 10119
  - zkusíme $f(80) = -6378$, vyhovuje
- separace 2. kořene
  - předchozí $f(80) = -6378$
  - hrubý odhad zanedbáním absolutního člene

$$-875n + 40n^{1.5} = 0 \qquad \text{tedy} \qquad n = \left(\frac{875}{40}\right)^2 = 478.51$$

  - zkusíme $f(500) = 44713$, vyhovuje
- numerická stabilita v dané separaci kořenů
  - součty/rozdíly čísel s minimálním řádovým rozdílem
  - reálně nás zajímá přesnost na jednotky
  - žádný potenciální problém

Obchodní případ

- vypočtené kořeny 62.7 a 384.0
- výsledky v požadované přesnosti shodné všemi metodami
- chování jednotlivých metod (počty iterací)

přesnost	10^{-1}		10^{-4}	
kořen	1	2	1	2
půlení	11	15	21	25
Ridders	5	9	7	11
Brent	5	9	7	10

- umělá přesnost 10^{-4} – zdvojnásobení počtu platných číslic
- dokládá očekávanou rychlost konvergence
  - lineární pro půlení intervalů
  - $\sqrt{2}$ pro ostatní metody