Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

Příklady k cvičením – IB005 a IB102 Formální jazyky a automaty

Ivana Černá
Jiří Barnat
Vojtěch Řehák

poslední modifikace 20. února 2006

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 Jsou dány jazyky L_1, L_2 nad abecedou $\{x, y, z\}^*$, kde $L_1 = \{xy, y, yx\}$, $L_2 = \{y, z\}$. Vypočítejte:

a) $L_1 \cup L_2$

b) $L_1 \cap L_2$

c) $L_1 \cdot L_2$, $L_2 \cdot L_1$

d) L_2^0, L_2^1, L_2^2, L_2^3, L_2^*, L_2^+

e) $co - L_2$

1.2 Vypočítejte:

a) $\emptyset^*$, $\emptyset^+$, $\{\varepsilon\}^*$, $\{\varepsilon\}^+$

b) $\emptyset \cup \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap L$, $\{\varepsilon\} \cap L$

c) $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cdot L$, $\{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\} \cdot L$

1.3 Jsou dané jazyky $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, kde $L_1 = \{a, aa, ba\}$, $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$.

a) Vypočítejte $L_1 \cup L_2$.

b) Vypočítejte $L_1 \cap L_2$.

c) Vypočítejte $L_1 \cdot L_2$.

d) Rozhodněte, zda platí $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.

e) Najděte slovo $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$.

f) Rozhodněte, zda platí $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$. Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků L_1, L_2 ?

g) Rozhodněte, zda platí

- $aabaabc \in L_2^4$
- $baaabc \in L_2^6$
- $ababc \in L_2^3$

h) Popište $co - L_2$ (komplement jazyka L_2).

1.4 Buď L libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

a) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$

b) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$

c) najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

1.5 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_4$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{xyz\}^*$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.6 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$

- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.7 Pomocí jazyků $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace (*,$^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk, obsahující právě všechna slova, která

a) obsahují alespoň 2 znaky a
b) mají sudou délku
c) začínají znakem a a končí znakem b
d) začínají a končí stejným znakem
e) obsahují podslovo aba
f) splňují b) a c)
g) nesplňují b)

1.8 Pro libovolné jazyky $L_1,\ L_2,\ L_3$ dokažte, zda platí, nebo neplatí:

a) $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
b) $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
c) $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
d) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
e) $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
f) $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
g) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

1.9 Jaký jazyk generuje gramatika G a jakého je typu?

a) $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde
$$P = \{\ \begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid cAd, \\ cA & \to & aB \mid Ca, \\ Bd & \to & Sb \mid A, \\ Cad & \to & ab \mid \varepsilon \ \} \end{array}$$
b) $G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde
$$P = \{\ \begin{array}{lcl} S & \to & bS \mid cS \mid aA, \\ A & \to & aA \mid bA \mid cA \mid a \mid b \mid c\ \} \end{array}$$

1.10 Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů $(S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11})$.

$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$, kde
$$P = \{\ \begin{array}{lcl} S & \to & aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A & \to & aS \mid bC, \\ B & \to & aC \mid bS, \\ C & \to & aB \mid bA\ \} \end{array}$$

1.11 Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

a) $L = \{a, b, c, d\}^*$
b) $L = \{a, b, c, d\}^i \{a, b, c, d\}^*; i = 2, 10, 100$
c) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$
d) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k, k \geq 0\}$
e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$
f) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
g) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \text{první 3 znaky } w = \text{poslední 3 znaky } w\}$
h) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } abb\}$
i) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1,\ k, l \geq 0\}$
j) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného } 5\}$
k) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného } 3\}$
l) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného } 25\}$

Konečné determ. automaty, pumping lemma

2.1 Je dán následující konečný automat: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

a) Popište jazyk akceptovaný konečným automatem A.

b) Diskutujte variantu konečného automatu, kde $F = \{q_3, q_2\}$; $\delta(q_3, a) = q_0$

c) Uveďte jinou formu zápisu automatu.

2.2 Konstruujte **deterministické** KA, které rozpoznávají následující množiny

a) $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$

b) $\{w \mid w \in \{a\}^*;\ |w| = 2k$ nebo $|w| = 7l;\ k, l \geq 0\}$

c) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$

d) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w$ obsahuje podslovo $abbab\}$

e) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w$ obsahuje podslovo $ababb\}$

f) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w$ neobsahuje podslovo $abbab\}$

g) $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$

h) $(\{a\} \cup \{b\} \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\}) \cdot \{b\})^*$

2.3 Konstruujte **deterministické** KA pro následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$

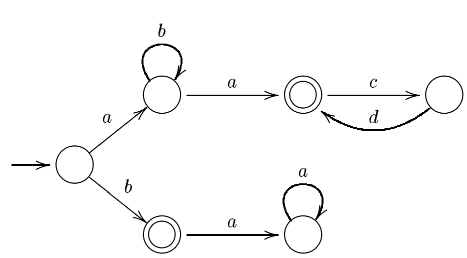
a) $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w$ neobsahuje slovo $babb\}$

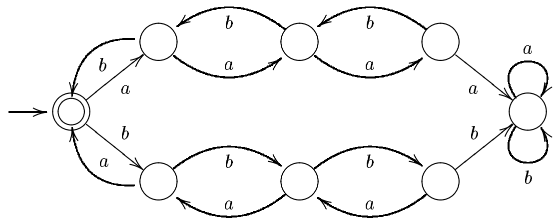
c) $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

d) a pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11

2.4 Pomocí množin $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace (*,$^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



2.5 Co akceptuje následující automat? ($\#_a(w) = \#_b(w)$ je špatná odpověď)



2.6 Pomocí **věty o vkládání** dokažte, že jazyk L není regulární:

a) $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*;\ \#_a(w) = \#_b(w)\}$

c) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

d) $L = \{a^n | n = 2^i;\ i \geq 0\}$

e) $L = \{a^i b^j | i \neq j;\ i,j \geq 0\}$

f) $L = \{a^n b^{(n!)^2} | n \geq 0\}$

g) $L = \{c^i a^j b^k | j \leq k;\ i,j,k \in \mathbb{N}\}$

Minimalizace KA, nedeterministické KA, (M-)Nerodova věta

3.1 Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruujte minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	5	2
3	3	5
$\leftarrow 4$	12	2
$\leftarrow 5$	7	8
6	4	9
7	12	11
8	4	6
9	10	8
$\leftarrow 10$	3	2
$\leftarrow 11$	12	6
12	3	10

b)

	a	b
$\leftrightarrow 1$	3	2
2	6	4
3	3	5
$\leftarrow 4$	4	2
5	10	8
6	6	7
$\leftarrow 7$	7	5
$\leftarrow 8$	8	2
$\leftarrow 9$	11	2
10	10	9
$\leftarrow 11$	11	5

3.2 Odstraňte nedosažitelné stavy z KA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převeďte do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou v pravo.

a)

	a	b
$\rightarrow 1$	5	2
2	2	8
3	2	7
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	1
6	2	5
$\leftarrow 7$	8	6
8	2	4
9	8	9

	a	b
$\rightarrow 1$	4	2
2	2	5
3	3	6
4	4	2
$\leftarrow 5$	5	3
$\leftarrow 6$	6	2

b)

	a	b
1	3	1
$\rightarrow 2$	9	4
3	5	1
$\leftarrow 4$	9	4
5	8	5
6	5	4
$\leftarrow 7$	6	9
8	10	10
9	7	9
10	8	1

	a	b
A	B	A
$\leftarrow$ B	C	A
C	D	E
D	D	D
$\rightarrow$ E	A	E

3.3 Ověřte, zda KA z příkladu 3.1 je ekvivalentní s následujícím KA zadaným tabulkou

	a	b
A	A	C
$\rightarrow$ B	D	A
$\leftarrow$ C	D	A
D	C	D

3.4 Navrhněte nedet. KA pro následující jazyky:

a) $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } bba \text{ nebo } aba\}$

b) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } acbca \text{ nebo } bcabb\}$

c) $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } aaaa\}$

d) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ má čtvrtý symbol od konce } 1\}$

e) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } 01011\}$

f) $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$

g) $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

3.5 K daným nedet. KA zkonstrujte det. KA

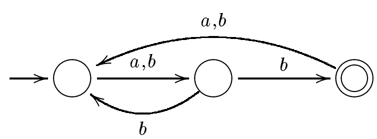
a)

	a	b	c
$\rightarrow$ 1	{2,3}	{3,4}	{1}
$\leftarrow$ 2	{3}	{4}	{2}
3	{1,2,3}	{1}	{3,4}
4	{1}	{1}	{3,4}

b)

	a	b	c
$\rightarrow$ 1	{1,2}	{1}	{1}
$\leftarrow$ 2	$\emptyset$	{3}	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	{4}
4	{5}	$\emptyset$	$\emptyset$
5	$\emptyset$	{6}	$\emptyset$
6	{7}	$\emptyset$	$\emptyset$
$\leftarrow$ 7	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

3.6 Popište jazyk akceptovaný automatem:



3.7 Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou $\{x\}$ nebo $\{x, y\}$?

3.8 Dokažte, že neexistuje automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

a) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \ |w| \geq 4\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \ |w| = 5k, k \in \mathbb{N}_0\}$

3.9 Najděte relaci $\sim \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$, splňující podmínky Nerodovy věty a určete její index. Pro jazyk L:

- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \ w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$

3.10 Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhill-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

a) $L = \{a^n \mid n = 2^i \text{ pro } i \in N_0\}$

b) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n; \ n, m > 0\}$

c) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$

3.11 Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 3k \text{ pro } k \in N_0\}$

3.12 Každý jazyk jednoznačně určuje relaci $\sim_L$ předpisem $u \sim_L v$ právě když pro každé w platí $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Určete index této relace pro jazyky:

a) $L = L(a^* b^* c^*)$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

Reg. gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ KA, ε kroky, Kleeneho věta

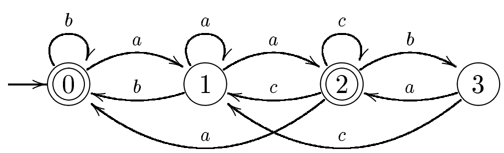
4.1 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\multicolumn{12}{l}{G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & aA & \mid & bC & \mid & a & \mid & \varepsilon, & & \\
 & A & \rightarrow & bB & \mid & aA & \mid & b & \mid & c, & & \\
 & B & \rightarrow & aB & \mid & bC & \mid & aC & \mid & cA & \mid & c, \\
 & C & \rightarrow & a & \mid & b & \mid & aA & \mid & bB \ \} & &
\end{array}
$$

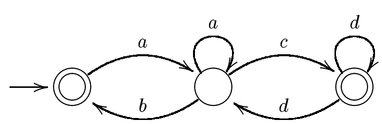
4.2 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & aX & \mid & bY & \mid & c, \\
 & X & \rightarrow & bX & \mid & bS, & & \\
 & Y & \rightarrow & bS & \mid & cZ, & & \\
 & Z & \rightarrow & aS & \mid & b & \mid & c \ \}
\end{array}
$$

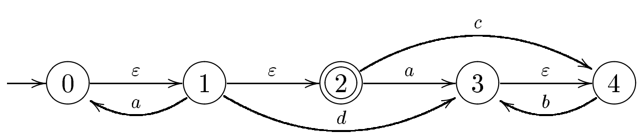
4.3 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



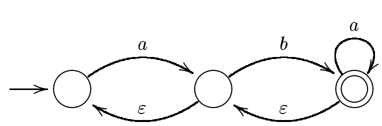
4.4 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



4.5 K danému automatu s ε kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε kroků.



4.6 K danému automatu s ε kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε kroků.



4.7 K danému automatu s ε kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε kroků.

	a	b	c	ε
$\rightarrow 1$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{5\}$	$\{3,5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{4\}$	$\emptyset$	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{1,5\}$
$\{5\}$	$\{5\}$	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{6\}$
$\leftarrow \{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3,6\}$	$\{2\}$

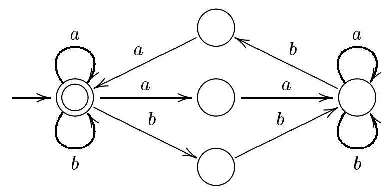
4.8 K danému regulárnímu výrazu zkonstruujte ekvivalentní KA

a) $(ab)^*(aa + bb)(a + ab)^*$

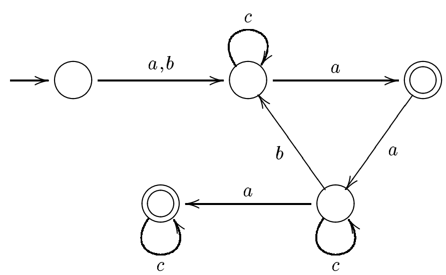
b) $((a + b(a + c))^* + (b + c))^*$

c) $(((a + b)^* + c)^* + d)^*$

4.9 K danému KA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.10 K danému KA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.11 Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ končí na $ab\}$

b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$

c) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ začíná a končí stejným symbolem $\}$

d) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

4.12 Ukažte, jaký je vztah mezi $\mathcal{R}$ a nejmenší třídou

a) M_1, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku $(\cup, \cdot, \cap)$.

b) M_2, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu $(\cup, \cap, co-\ )$.

c) M_3, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině $(\cup, \cap, ^n)$.

Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

5.1 Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky $L_1, L_2, L_3, \ldots$ regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

5.2 Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků $L_1, L_2, L_3, \ldots$ aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

5.3 Nechť L_1, L_2 jsou **ne**regulární jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvraťte, zda je či není regulární:

a) $L_1 \cap L_2$
b) $L_1 \cup L_2$
c) $L_1 \smallsetminus L_2$
d) $L_1 \cdot L_2$
e) L_1^*
f) $co - L_1$

5.4 Nechť L_1 je regulární a $L_1 \cap L_2$ je neregulární jazyk. Platí, že jazyk L_2 je nutně neregulární?

5.5 Platí následující implikace?

a) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je neregulární
b) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je regulární
c) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \smallsetminus L_2$ je neregulární
d) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \smallsetminus L_2$ je regulární
e) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \smallsetminus L_1$ je neregulární
f) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \smallsetminus L_1$ je regulární

5.6 **Def:** operace $\odot$ rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky L_1 a L_2 regulární, pak i jazyk $L_1 \odot L_2$ je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky L_1 a L_2, aby jazyk $L_1 \odot L_2$ byl regulární.

5.7 Nechť L je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky $L^\#$ jsou regulární:

a) $L^\# = \{v \mid \text{existuje } u \text{ takové, že } u.v \in L\}$
b) $L^\# = \{w \mid \text{existuje } x, y, z \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

5.8 **Def:** Homomorfismus $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Def: Nechť L je jazyk, pak $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$
Def: Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc $h(c) = \varepsilon$ pak $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že $\mathcal{R}$ je uzavřena na h, h^{-1}.

5.9 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h; $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$. Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

5.10 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h; $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$. Určete:

- $h^{-1}(aabaaabaa)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in N\}$

5.11 Dokažte nebo vyvraťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

Bezkontextové gramatiky

6.1 Co generují tyto gramatiky?

$G = (\{S,B,A\},\{a,b\},P,S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to aB \mid bA \mid \varepsilon, \\
A &\to aS \mid bAA, \\
B &\to bS \mid aBB \;\}
\end{aligned}
$$

$G = (\{S,A\},\{a,b\},P,S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to aAS \mid a, \\
A &\to ba \mid Sba \;\}
\end{aligned}
$$

6.2 Pro následující gramatiku

$G = (\{S,A,B\},\{a,b\},P,S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to AaB \mid BaA, \\
A &\to AB \mid a, \\
B &\to BB \mid b \;\}
\end{aligned}
$$

a) najděte derivační strom s výsledkem $bbbbaa$

b) je tento strom určený jednoznačně?

c) kolik různých nejlevějších odvození má slovo $bbbbaa$

d) je gramatika jednoznačná?

e) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.3 Jaké mají charakteristikcé vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

6.4 Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

6.5 Odpovězte zda pro

$G = (\{S\},\{a\},P,S)$, kde
$P = \{\; S \to SSS \mid a \;\}$

a) je gramatika jednoznačná?

b) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.6 Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$.

6.7 Navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{a^ib^jc^k \mid i,j,k \geq 1, i = j$ nebo $j \neq k\}$, je gramatika jednoznačná?

6.8 Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$G = (\{S,A,B,C,E,F,D\},\{a,b,c\},P,S)$, kde

$$
\begin{aligned}
P = \{\; S &\to aA \mid bB, \\
A &\to aAB \mid aa \mid AC \mid AE, \\
B &\to bBA \mid bb \mid CB \mid BF, \\
C &\to DE, \\
D &\to cc \mid DD, \\
E &\to FF \mid FE, \\
F &\to EcE \;\}
\end{aligned}
$$

6.9 Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

6.10 Je jazyk generovaný gramatikou G bezkontextový?

$$G = (\{S,T\},\{x,y\},P,S), \text{ kde}$$
$$P = \{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & xT, \\ T & \rightarrow & Sx, \\ xTx & \rightarrow & y \ \} \end{array}$$

6.11 Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$

d) $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$

e) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

f) $L = \{uxv \mid u, x, v \in \{a,b,c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.1 Odstraňte ε-pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c, a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{llllllll} P = \{ & S & \rightarrow & ABC, & & & & \\ & A & \rightarrow & AbA & \mid & BC, & & \\ & B & \rightarrow & bB & \mid & b & \mid cBbAa & \mid \varepsilon, \\ & C & \rightarrow & cD & \mid & c & \mid Ab & \mid \varepsilon, \\ & D & \rightarrow & SSS & \mid & b\ \} & & \end{array}$$

7.2 Odstraňte ε-pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{llllllll} P = \{ & S & \rightarrow & ABC, & & & & \\ & A & \rightarrow & Ab & \mid & BC, & & \\ & B & \rightarrow & bB & \mid & b & \mid Ab & \mid \varepsilon, \\ & C & \rightarrow & cD & \mid & c & \mid Ac & \mid \varepsilon, \\ & D & \rightarrow & SSS & \mid & cSAc\ \} & & \end{array}$$

7.3 Odstraňte ε-pravidla:

$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllllll} P = \{ & S & \rightarrow & 1X & \mid Y1 & \mid XZ, \\ & X & \rightarrow & 0YZ1 & \mid S1X & \mid Y, \\ & Y & \rightarrow & 1 & \mid X1 & \mid \varepsilon, \\ & Z & \rightarrow & SZ & \mid 0 & \mid \varepsilon\ \} \end{array}$$

7.4 Význam konstrukce množin N_ε na příkladu

$$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{llllll} P = \{ & A & \rightarrow & BC & \mid a & \mid \varepsilon, \\ & B & \rightarrow & aB & \mid ACC & \mid b, \\ & C & \rightarrow & cC & \mid AA & \mid c\ \} \end{array}$$

7.5 Odstraňte jednoduché pravidla. Diskuse o významu N_A.

$$G = (\{S, X, Y, A, D, B, C\}, \{b, a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllll} P = \{ & S & \rightarrow & X & \mid Y, \\ & A & \rightarrow & bS & \mid D, \\ & D & \rightarrow & ba, & \\ & B & \rightarrow & Sa & \mid a, \\ & X & \rightarrow & aAS & \mid C, \\ & C & \rightarrow & aD & \mid S, \\ & Y & \rightarrow & SBb\ \} & \end{array}$$

7.6 Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllllll} P = \{ & S & \rightarrow & SaSbS & \mid aAa & \mid bBb, & \\ & A & \rightarrow & aA & \mid aaa & \mid B & \mid \varepsilon, \\ & B & \rightarrow & Bb & \mid bb & \mid b\ \} & \end{array}$$

7.7 Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ kde}$$
$$\begin{array}{lllllll} P = \{ & S & \rightarrow & 0H1 & \mid 1L0 & \mid \varepsilon, & \\ & H & \rightarrow & HH & \mid 0H1 & \mid LH & \mid \varepsilon, \\ & L & \rightarrow & LL & \mid 1L0 & \mid HL & \mid \varepsilon\ \} \end{array}$$

7.8 Navrhněte gramatiku v CNF:

a) $L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\}$

b) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

7.9 Nechť G je gramatika v CNF. Nechť $w \in L(G), |w| = n$. Jaká je minimální a maximální délka odvození slova w v G?

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{G = (\{S,A,B\},\{a,b\},P,S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & Aa & \mid Bb & \mid aaA & \mid SaA & \mid SbB, \\
 & A & \rightarrow & AAb & \mid ab & \mid SBb, & & \\
 & B & \rightarrow & Bbb & \mid BBB & \mid bAb \ \} & &
\end{array}
$$

7.11 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{G = (\{S,A,B\},\{1,0\},P,S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & A1 & \mid 0 & \mid 1B, \\
 & A & \rightarrow & BS0 & \mid 10 & \mid SB0, \\
 & B & \rightarrow & 0B & \mid B1B & \mid S0 \ \}
\end{array}
$$

7.12 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{G = (\{S,X,Y\},\{c,d,b,a\},P,S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & Xc & \mid Yd & \mid Yb, \\
 & X & \rightarrow & Xb & \mid a, & \\
 & Y & \rightarrow & SaS \ \} & &
\end{array}
$$

7.13 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$
\begin{array}{lllllll}
\multicolumn{7}{l}{G = (\{S,T\},\{t,s\},P,S), \text{ kde}} \\
P = \{ & S & \rightarrow & TTt & \mid Tt & \mid TS & \mid s, \\
 & T & \rightarrow & SsT & \mid TsT & \mid t \ \} &
\end{array}
$$

7.14 Transformujte do Greibachové NT. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$$
\begin{array}{lllll}
\multicolumn{5}{l}{G = (\{A,B,C,D\},\{a,b\},P,A), \text{ kde}} \\
P = \{ & A & \rightarrow & BC, & \\
 & B & \rightarrow & CD & \mid AB, \\
 & C & \rightarrow & Aa & \mid b, \\
 & D & \rightarrow & bA & \mid DD \ \}
\end{array}
$$

7.15 Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

a) $L = \{wcw \mid w \in \{a,b\}^*\}$

b) $L = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$

c) $L = \{a^nb^mc^nd^m \mid n,m \geq 1\}$

Zásobníkové automaty

8.1 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, d, A) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} \\
\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} &
\end{array}
$$

- Načrtněte stavový diagram ZA A.
- Naznačte 4 různé výpočty na vstupu $a^4 b^2 c$ (stačí na obrázku).
- Popište jazyk $L(A)$.

8.2 Je daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$, kde

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\
\delta(q_1, a, Y) = \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) = \{(q_4, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

a) Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud $F = \{q_2\}$.

b) Popište jazyk akceptovaný automatem s původním F, tj. $F = \{q_2, q_4\}$.

8.3 Konstruujte ZA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

a) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j,\ i, j \geq 0\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \geq 1\}$

d) $L = \{a^{3n+2} b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$

e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$

f) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$

g) $L = \{a^k b^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$

h) $L = \{a^{n+m} b^{m+p} c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$

i) $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^k b^k c^m \mid k, m \geq 1\}$

j) $L = \{a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_r} \mid r > 1,\ k_i \geq 1\ (i = 1, \dots, r;\ \text{existuje}\ p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

8.4 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$ akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete $L(A)$.

$$
\begin{array}{l}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} \\
\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

8.5 Daný ZA $A = (\{q\}, \{(,)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete $L(A)$.

$\delta(q, (, Z) = \{(q, L)\}$
$\delta(q, (, L) = \{(q, LL)\}$
$\delta(q,), L) = \{(q, \varepsilon)\}$

8.6 Pro danou G navrhněte (rozšířený) ZA, který provádí syntaktickou analýzu:

a) shora dolů,

b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova $abababaa$.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllllll}
P = \{ & S & \to & \varepsilon & \mid & abSA, & \\
 & A & \to & AaB & \mid & aB & \mid a, \\
 & B & \to & aSS & \mid & bA & \}
\end{array}
$$

8.7 Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převeďte na standardní zásobníkový automat.

8.8 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset\})$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a, A) = \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) = \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) = \{(q_0, A)\}
\end{array}
$$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.1 O každé z následujících implikací rozhodněte zda je pravdivá

a) L_1, L_2 bezkontextové $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ je kontextový

b) L_1 bezkontextový $\wedge L_1 \cap L_2$ není bezkontextový $\Rightarrow L_2$ není bezkontextový

c) L_1 regulární $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

d) L_1 konečný $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

9.2 Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$
$$R = L((a^*b^+a)^* + a^*)$$

Navrhněte ZA pro jazyk $L \cap R$

$\delta_L(q_0, x, Z) = \{(q_0, xZ)\}$	$\forall x \in \{a,b\}$	$\delta_R(p_0, a) = p_0$
$\delta_L(q_0, x, y) = \{(q_0, xy)\}$	$\forall x, y \in \{a,b\}$	$\delta_R(p_0, b) = p_1$
$\delta_L(q_0, \varepsilon, x) = \{(q_1, x)\}$	$\forall x \in \{a,b,Z\}$	$\delta_R(p_1, b) = p_1$
$\delta_L(q_1, x, x) = \{(q_1, \varepsilon)\}$	$\forall x \in \{a,b\}$	$\delta_R(p_1, a) = p_0$
$\delta_L(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$		
$F_L = \{q_2\}$		$F_R = \{p_0\}$

9.3 Je dána bezkontextová gramatika
$G = (\{S\},\{a,b\},P,S)$, kde
$P = \{\ S \ \rightarrow \ aS \ \mid \ Sb \ \mid \ a\ \}$

a) Má tato gramatika vlastnost sebevložení?

b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevložení?

c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?

d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevložení a regularitou?

9.4 Je dán bezkontextový jazyk L, $L \subseteq \{a,b\}^*$
Zkonstruujeme nový jazyk L_1 takto:

a) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ xy \in L\}$

b) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ yx \in L\}$

Dokažte, že L_1 je taky bezkontextový.

Konstrukce Turingových strojů

10.1 Navrhněte determinstický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

10.2 Navrhněte deterministický jednopáskový TS se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ a takový, že výpočty na slovech tvaru 0^*1^* jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

10.3 Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásky) TS pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

10.4 Navrhněte TS (determ. nebo nedeterm.) TS pro jazyk:

- $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$
- $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- $L = \{a^p \mid p$ není prvočíslo $\}$
- $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w$ je binární zápis čísla $n\}$

Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.1 Objsaněte rozdíl mezi pojmy TS akceptuje a TS rozhoduje.

11.2 Je daný DTS T (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhněte k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{array}{ll}
\delta(q,\rhd) = (q,\rhd,R) & \delta(q,a) = (p,A,R) \\
\delta(p,b) = (q,a,L) & \delta(q,\sqcup) = (p,A,R) \\
\delta(p,\sqcup) = (q,a,L) & \delta(q,a) = (q_{accept},A,R)
\end{array}$$

Kde $\rhd$ je levá koncová značka, $\sqcup$ označuje prázdné políčko, stavy jsou $\{p, q, q_{accept}\}$, q je počáteční stav, vstupní abeceda je $\{a, b\}$ a pásková abeceda odpovídá množině $\{\rhd, \sqcup, A, a, b\}$.

11.3 O každé z následujících implikací rozhodněte zda je pravdivá

- R je regulární, L je rekurzivně spočetný $\Rightarrow R \cap L$ je regulární
- L je rekurzivní $\Rightarrow$ co-L je rekurzivní
- L je rekurzivní $\Rightarrow L^*$ je rekurzivní (Zkuste neformální důkaz)
- L je kontextový $\Rightarrow$ co-L je rekurzivní (Zkuste neformální důkaz)

11.4 Navrhněte gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n \text{ je mocnina } 2\}$

11.5 Ukažte, že jazyk $L = \{w \mid w$ je kód dvojice (A, v) takové, že TS A zastaví svůj výpočet nad slovem $v\}$ je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

11.6 Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

Funkce FIRST a FOLLOW

Definice: Buď dána gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$. Funkce $FIRST_1$ a $FOLLOW_1$ jsou definovány následovně:

$$FIRST_1 : (\Sigma \cup N)^* \;\mapsto\; 2^{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}$$
$$FIRST_1(\alpha) = \{w \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \mid (\alpha \Rightarrow^* w \;\wedge\; |w| = 0) \;\vee\; (\alpha \Rightarrow^* wu \;\wedge\; |w| = 1\,;\; u \in \Sigma^*)\}$$

$$FOLLOW_1 : N \mapsto 2^{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}$$
$$FOLLOW_1(A) = \{w \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \mid S \Rightarrow^* uA\alpha,\; w \in FIRST_1(\alpha)\;;\; u \in \Sigma^*,\; \alpha \in (\Sigma \cup N)^*\}$$

Poznámka: Pozor na typ argumentu u jednotlivých funkcí. Funkce $FIRST_1(\alpha)$ bere jako argument řetězec terminálů a neterminálů ($\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$), narozdíl od funkce $FOLLOW_1(A)$, jejíž argumentem je vždy právě jeden neterminál ($A \in N$). Běžně se používají zkrácené zápisy funkcí, $FI_1(\alpha)$ pro $FIRST_1(\alpha)$ a $FO_1(A)$ pro $FOLLOW_1(A)$.

12.1 Určete $FI_1(A)$ pro gramatiku

$G = (\{A\},\{a,b\},P,A)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{\; & A \;\to\; Aa, \\ & A \;\to\; b \;\} \end{aligned}$$

12.2 Vypočítejte $FI_1(S)$, $FI_1(BBb)$, $FI_1(SAcB)$, $FO_1(A)$, $FO_1(S)$, $FO_1(B)$ a $FO_1(C)$ pro následující gramatiku:

$G = (\{S,A,B,C\},\{a,c,b,e,d\},P,S)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{\; & S \;\to\; aAc \mid B, \\ & A \;\to\; aA \mid bSCe \mid \varepsilon, \\ & B \;\to\; aC \mid \varepsilon, \\ & C \;\to\; d \mid \varepsilon \;\} \end{aligned}$$

12.3 Vypočítejte $FO_1(X)$, kde $X \in \{S,A,B,C,D\}$ je-li zadána tato gramatika:

$G = (\{S,A,B,C,D\},\{a,b,d,c,x,y,z\},P,S)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{\; & S \;\to\; aABbCD \mid \varepsilon, \\ & A \;\to\; ASd \mid \varepsilon, \\ & B \;\to\; SAc \mid xC \mid \varepsilon, \\ & C \;\to\; Sy \mid Cz \mid \varepsilon, \\ & D \;\to\; aBD \mid \varepsilon \;\} \end{aligned}$$

12.4 Vypočítejte $FO_1(X)$, kde $X \in \{S,A,B,C,D\}$ je-li zadána tato gramatika:

$G = (\{S,B,A,D,C\},\{a,c,b,d\},P,S)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{\; & S \;\to\; aBcB, \\ & A \;\to\; aA \mid Aa, \\ & B \;\to\; DAc \mid bA, \\ & C \;\to\; cBc \mid aaB, \\ & D \;\to\; d \mid dC \;\} \end{aligned}$$

Věta: Gramatika je $LL(1)$, právě když pro všechny neterminály $A \in N$, a pro každá dvě různá pravidla $A \to \beta, A \to \gamma$ platí:

$$FI_1(\beta \cdot FO_1(A)) \cap FI_1(\gamma \cdot FO_1(A)) = \emptyset$$

12.5 Ověřte, zda následující gramatika je $LL(1)$, pokud ano sestrojte $LL(1)$ analyzátor a proveďte analýzu slova $bbac$.

$G = (\{S,A,B\},\{a,b,c\},P,S)$, kde

$$\begin{aligned} P = \{\; & S \;\to\; aAb \mid bB \mid c, \\ & A \;\to\; \varepsilon \mid aA, \\ & B \;\to\; \varepsilon \mid bAcA \;\} \end{aligned}$$

12.6 Ověřte, zda následující gramatika je $LL(1)$, pokud ano sestrojte $LL(1)$ analyzátor a proveďte analýzu slova baa.

$G = (\{S, X, Y\}, \{b, a\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllll}
P = \{ & S & \to & X, & \\
 & X & \to & Y & \mid bYa, \\
 & Y & \to & a & \mid \varepsilon \ \}
\end{array}
$$

12.7 Ověřte, zda následující gramatika je $LL(1)$, pokud ano sestrojte $LL(1)$ analyzátor a proveďte analýzu slova $bbbba$.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{lllll}
P = \{ & S & \to & aAaB & \mid bAbB, \\
 & A & \to & a & \mid bb, \\
 & B & \to & bB & \mid A \ \}
\end{array}
$$

Poznámka: V jednoduché $LL(1)$ gramatice začínají všechny pravé strany pravidel terminálem, pravidla se stejnou levou stranou začínají různým terminálem.

12.8 Rozmyslete si jak probíhá analýza jednoduchých $LL(1)$ gramatik.

12.9 Navrhněte $LL(1)$ jednoduchou gramatiku pro jazyk zapsaný následující množinou

a) $\{1^n\, 2\, 0^n\, 1^m\, 2\, 0^m \mid n > 0, m \geq 0\}$

b) $\{1^n\, 2\, 0^n\, 1^m\, 2\, 0^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$

12.10 Najděte jazyk, který se nedá generovat žádnou jednoduchou $LL(1)$ gramatikou.