Algebra II, 1. termín, úloha A, 3.6. 2003

Jméno : **UČO :**

Reprezentace konečných distributivních svazů

a) Algebraicky definovaný svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svazem ve smyslu uspořádaných množin, klademe-li

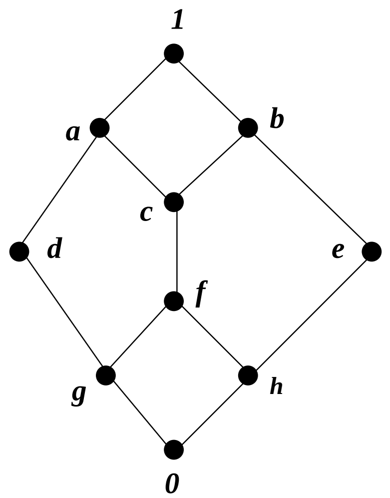
$$a \leq b \iff \text{...} \;.$$

b) Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz. Prvek $a \in L$ je spojově ireducibilní, jestliže

. . . .

Množinu všech spojově ireducibilních prvků svazu $\mathcal{L}$ s vyjímkou nejmenšího (pokud existuje) značíme $\mathsf{J}(\mathcal{L})$.

c) Nakreslete diagram uspořádané množiny $(\mathsf{J}(\mathcal{K}), \leq)$ pro svaz $\mathcal{K}$



d) Nechť $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je uspořádaná množina. Množina $X \subseteq A$ je dědičná, jestliže

. . . .

Množinu všech dědičných podmnožin značíme $\mathsf{H}(\mathcal{A})$.

e) Doplňte větu : Konečný distributivní svaz $\mathcal{L} = (L, \leq)$ je izomorfní s množinou

. . . .

s uspořádáním . . . .

f) Doplnění důkazu : Uvažujeme zobrazení

$$\xi : L \to \text{................}, \quad a \mapsto \text{.............................}$$

Vzhledem k tomu, že svaz $\mathcal{L}$ je . . . ., platí pro lib. $a \in L$, že $a = \sup \xi(a)$.

Odtud zejména plyne, že zobrazení ξ je . . . . a že platí $\xi(a) \leq \xi(b)$ implikuje $a \leq b$.

Zřejmě též $a \leq b$ dá ....

Zbývá ukázat, že zobrazení ξ je ....

Skutečně, nechť $X = \{$................................$\} \in$ ....

Položme $a = \sup X$. Pak $\xi(a) \supseteq X$. Nechť konečně $y \in \xi(a)$. Pak

....

....

....

g) Uveďte diagram uspořádané množiny, kterou jste doplnili do e), pro náš konkrétní příklad svazu $\mathcal{K}$.

h) Sledujte důkaz z f) a uveďte **zcela konkrétně**, co v případě svazu $\mathcal{K}$ neprošlo.

Algebra II, 1. termín, úloha B, 3.6. 2003

Jméno : **UČO :**

Volná algebra

Levý normální band je idempotentní pologrupa splňující identitu $xyz = xzy$.

a) Identita $x_{i_1} \dots x_{i_k} = x_{j_1} \dots x_{j_l}$ je splněna ve všech levých normálních bandech právě když

....

b) Dokažte, že množina $F = \{ \ (a, A) \mid a \in A \subseteq M, A$ konečná $\}$ spolu s operací

$$(a, A) \circ (b, B) = (a, A \cup B)$$

je volný levý normální band nad množinou M vzhledem k $\iota : a \mapsto (a, \{a\})$.

(i) $(F, \circ)$ je levý normální band :

....

....

....

(ii) Množina $\iota(M)$ generuje $(F, \circ)$, neboť libovolný prvek množiny F lze psát jako

....

(iii) Nechť $(S, \star)$ je levý normální band a nechť $\alpha : M \to S$ je zobrazení. Položme

$\beta : F \to S$, ... $\mapsto$ ....

Zobrazení β je definováno korektně, neboť

....,

je to homomorfismus, neboť

....

....

Konečně $\beta\iota =$ ...., neboť ....

c) Kolik má pologrupa F prvků pro $|M| = n \in \mathbb{N}$?

....

Algebra II, 1.termín, úloha C, 3.6. 2003

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech unárních algeber (A, f), kde $f : A \to A$ je bijekce, uvažovaná v jazyku jediného unárního operačního symbolu uzavřená na operátor S ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť $\mathsf{P}'(\mathbb{N})$ značí množinu všech neprázdných podmnožin množiny $\mathbb{N}$. Rozhodněte, zda zobrazení

$$\alpha : \mathsf{P}'(\mathbb{N}) \to \mathbb{N},\ X \mapsto \min X$$

je grupoidový homomorfismus

$$(\mathsf{P}'(\mathbb{N}), \cup) \to (\mathbb{N}, \min) \ ?$$

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{R}$ definujeme relaci ρ vztahem

$$a \ \rho \ b \iff a - b \in \mathbb{Z} \ .$$

Je tato relace kongruencí okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 10.6. 2003

Jméno : **UČO :**

Identity v monounárních algebrách

Uvažujeme jazyk jediného unárního operačního symbolu f a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, g)$ a $\mathcal{B} = (B, h)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka. (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

....

V našem případě je lze psát ve tvaru ....

b) Definujte (induktivně) realizaci $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

....

c) Zobrazení α : .... je homomorfismem algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{B}$, platí-li

....

d) Je-li navíc $a_1, \ldots, a_n \in A$, máme $\alpha(t^{\mathcal{A},n}(a_1, \ldots, a_n)) =$ ....

e) Dokažte tvrzení z d).

....

....

f) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$ a nechť α je

....

Pak ....

g) Dokažte tvrzení z f).

....

....

h) Nechť algebra $\mathcal{A}$ je konkretizována takto: $A = \{a, b, c, d, e\}$, $g(a) = b$, $g(b) = c$, $g(c) = d$, $g(d) = e$, $g(e) = d$. Charakterizujte identity, které jsou v $\mathcal{A}$ splněny

....

....

i) Nechť $\mathcal{A}$ je jako v bodě h), nechť $p \in B$. Kdy lze přiřazení $a \mapsto p$ rozšířit do homomorfismu algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{B}$?

Právě když ....

Algebra II, 2. termín, úloha B, 10.6. 2003

Jméno : **UČO :**

Pseudokomplementární svazy

Svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ s nejmenším prvkem, ozn. 0, se nazývá ***pseudokomplementární*** jestliže pro libovolné $a \in L$ existuje $a^* \in L$ tak, že

$$(\forall\, b \in L)\ a \wedge b = 0 \iff b \leq a^* \ .$$

Dokažte (týká se to bodů a) - c)):
a) Každá Booleova algebra $(L, \wedge, \vee, 0, 1, ')$ je pseudokomplementárním svazem.

Důkaz: Pro $a \in L$ položíme $a^* = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Nechť $b \in L,\ a \wedge b = 0$, pak

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Nechť naopak $b \leq a^*$. Pak

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) Každý omezený řetězec je pseudokomplementární.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) Každý konečný distributivní svaz je pseudokomplementární. (Návod: asi se Vám bude hodit množina $C = \{b \in L \mid a \wedge b = 0\}$.)

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Dejte příklad (týká se to bodů d) a e)):
d) Konečného omezeného svazu, který není pseudokomplementární.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) Distributivního svazu, který není pseudokomplementární.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Algebra II, 2. termín, úloha C, 10.6. 2003

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech konečných těles v jazyce binárních operačních symbolů $+, \cdot$ a nulárního operačního symbolu 1 uzavřená na operátor P ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Uvažujme algebru $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, ')$, kde $a' = a + 1$. Je zobrazení $\alpha : a \mapsto a + 1$ jejím endomorfismem ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme relaci ρ vztahem

$$a \ \rho \ b \iff a^2 = b^2 \ .$$

Je tato relace kongruencí grupoidu $(\mathbb{Z}, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha A, 2.7. 2003

Jméno : **UČO :**

Identity v biunárních algebrách

Uvažujeme jazyk dvojice unárních operačních symbolů f a g a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, p, q)$ a $\mathcal{B} = (B, r, s)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka. (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

....

b) Nechť $M = \{f, g\}^*$ je volný monoid nad množinou $\{f, g\}$. Prvky T_n lze psát ve tvaru

....

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

....

d) Zobrazení α : .... je homomorfismem algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{B}$, platí-li

....

e) Je-li navíc $a_1, \ldots, a_n \in A$, máme $\alpha(t^{\mathcal{A},n}(a_1, \ldots, a_n)) =$ ....

f) Dokažte tvrzení z d).

....

....

g) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$ a nechť α je

....

Pak ....

h) Dokažte tvrzení z f).

....

....

i) Nechť algebra $\mathcal{A}$ je konkretizována takto: $A = \{0, 1, 2\}$, $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 0$, $q(0) = 2$, $q(1) = 0$, $q(2) = 1$. Charakterizujte identity, které jsou v $\mathcal{A}$ splněny

....

j) Nechť $\mathcal{A}$ je jako v bodě i). Charakterizujte identity, které nejsou v $\mathcal{A}$ splněny

....

Algebra II, 3. termín, úloha B, 2.7. 2003

Jméno : **UČO :**

Vztahy mezi uspořádanými množinami a distributivními svazy

Pro uspořádanou množinu $\mathcal{A} = (A, \leq)$ nechť $\mathsf{H}(\mathcal{A})$ značí množinu všech jejích dědičných podmnožin. Nechť pro svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je $\mathsf{J}(\mathcal{L})$ množinou všech jeho spojově ireducibilních prvků s (eventuální) výjimkou nejmenšího.

Dokážeme, že pro konečné A platí :

$$\mathcal{A} \text{ je izomorfní s } (\mathsf{J}(\mathsf{H}(\mathcal{A}), \subseteq), \leq) .$$

Definujeme zobrazení $\beta : a \mapsto$ ...., $a \in A$.
β skutečně vede tam, kam potřebujeme

....

....

....

Dále : β splňuje $a \leq b \iff$ ....

neboť .... dá ....

a .... dá ....

Odtud zejména plyne, že β je ....

Zbývá ukázat, že β je ....

Skutečně, ...

....

....

....

....

Demonstrujte tvrzení pro $A = \{0, a, b, 1\}, 0 < a, b < 1,\ a, b$ nesrovnatelná.

Platí tvrzení pro $(\mathbb{Q}, \leq)$? Analyzujte situaci.

Pokračujte na opačné straně

Algebra II, 3. termín, úloha C, 2.7. 2003

Jméno : **UČO :**

a) Množina $\mathsf{P}(A)$ všech podmnožin množiny A tvoří vzhledem k "přirozeným" operacím Booleovu algebru. Je $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ podalgebrou algebry $\mathsf{P}(\mathbb{Q})$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Uvažujme algebru $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, s)$, kde $s(a) = a + 1$. Je relace

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \iff a + b = c + d$$

kongruencí algebry $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je zobrazení

$$\alpha : \mathbb{Z}[x, y] \to \mathbb{Z},\ f \mapsto \text{ absolutní člen } f$$

homomorfismem okruhu $(\mathbb{Z}[x, y], +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 1. termín, úloha A, 26.5. 2004

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk binárního operačního symbolu $\circ$.

a) Definujte termy.

....

....

....

b) Definujte realizace termů.

....

....

....

c) Definujte identity a jejich splňování.

....

....

d) Definujte kongruenci grupoidu $\mathcal{A} = (A, \cdot)$; ozačujme ji ρ.

....

....

e) Definujte příslušnou faktorovou algebru $\mathcal{A}/\rho$ a tzv. přirozený homomorfismus $\rho^\sharp$. Ukažte, že se skutečně jedná o homomorfismus.

....

....

f) Nechť ρ je kongruence grupoidu $\mathcal{A} = (A, \cdot)$, nechť p je n-ární term a nechť $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dokažte, že

$$\rho^\sharp(p^{\mathcal{A},n}(a_1, \ldots, a_n)) = p^{\mathcal{A}/\rho,n}(\rho^\sharp(a_1), \ldots, \rho^\sharp(a_n)) \ .$$

....

....

....

g) Nechť grupoid $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ splňuje identitu $p = q$ a nechť ρ je jeho kongruence. Dokažte, že též $\mathcal{A}/\rho$ splňuje identitu $p = q$. (Můžete využít bod f).)

....

....

....

h) Pro $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, +)$ a ρ definované vztahem $a\rho b \iff a \equiv b \pmod 2$ najděte identitu platnou v $\mathcal{A}/\rho$, která neplatí v $\mathcal{A}$.

....

Algebra II, 1. termín, úloha B, 26.5. 2004

Jméno : **UČO :**

Nechť $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je uspořádaná množina. Pro $X \subseteq A$ klademe

$$\uparrow X = \{\ a \in A \mid \text{ pro vš. } x \in X \text{ je } x \leq a\ \},\ \downarrow X = \{\ a \in A \mid \text{ pro vš. } x \in X \text{ je } a \leq x\ \}\ .$$

Pro $X \subseteq A$ klademe $C(X) = \downarrow\uparrow X$. Dále $A_C = \{\ C(X) \mid X \subseteq A\ \}$ a $\mathcal{A}_C = (A_C, \subseteq)$.

a) Pro $X \subseteq A$ platí X........... $\downarrow\uparrow X$. Důkaz :

....

....

b) Podobně pro $X \subseteq A$ platí X........... $\uparrow\downarrow X$.

c) Pro $X, Y \subseteq A,\ X \subseteq Y$ platí $\uparrow X$........... $\uparrow Y$. Důkaz :

....

d) Podobně pro $X, Y \subseteq A,\ X \subseteq Y$ platí $\downarrow X$........... $\downarrow Y$.

e) Pro $X \subseteq A$ platí $\uparrow X = \uparrow\downarrow\uparrow X$. Skutečně,

....

....

....

f) Z bodu e) plyne, že pro lib. $X \subseteq A$ máme $C(C(X)) = C(X)$. Důkaz :

....

g) Pro $a \in A$ zjednodušte $\downarrow\uparrow \{a\}$:

....

....

h) Dokažte, že $\xi : a \mapsto C(\{a\})$ je vnořením $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}_C$.

....

....

i) Dokažte, že pro lib. neprázdný systém $(X_i)_{i \in I}$ platí $\downarrow (\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} (\downarrow X_i)$.

....

....

j) Ukažte, že A_C je uzavřené na průniky neprázdných systémů.

....

....

k) Ukažte, že $\mathcal{A}_C$ je úplný svaz.

....

....

l) Jak vypadají prvky $(\mathbb{Z}, \leq)_C$?

....

....

Algebra II, 1.termín, úloha C, 26.5. 2004

Jméno : **UČO :**

a) V pologrupě $(S, \cdot)$ lze *krátit zleva*, platí-li

$$(\ \forall \ \ a, b, c \in S \ ) \ (\ a \cdot b = a \cdot c \ \Rightarrow \ b = c \ ) \ .$$

Je třída všech pologrup s krácením zleva uzavřená na operátor S ?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Jsou svazy $(\mathbb{Z}, \leq)$ a $(\mathbb{Q}, \leq)$ izomorfní ?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $S_3 = \{ \ id, \ (1,2), \ (1,3), \ (2,3), \ (1,2,3), \ (1,3,2) \ \}$ definujeme relaci ρ vztahem

$$a \ \rho \ b \iff a \cdot \{ \ id, \ (1,2) \ \} = b \cdot \{ \ id, \ (1,2) \ \} \ .$$

Je tato relace kongruencí grupy $(S_3, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 2. 6. 2004

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk binárního operačního symbolu $\circ$. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Definujte homomorfismus.

....

....

b) Definujte podalgebru.

....

....

c) Definujte kongruenci.

....

....

d) Definujte faktorovou algebru a tzv. přirozený homomorfismus.

....

....

e) Dokažte, že pro homomorfismus $\alpha : (A, \cdot) \to (B, \cdot)$ je

$\ker \alpha =$ .... kongruencí algebry ....

Skutečně, ...

....

f) Ukažte, že $\mathsf{im}\, \alpha =$ .... je podalgebrou algebry ....

Skutečně, ...

....

g) Doplňte a dokažte : lib. homomorfismus $\alpha : (A, \cdot) \to (B, \cdot)$ lze psát ve tvaru $\alpha = \iota\ \beta\ (\ker \alpha)^\sharp$, kde

....

....

Skutečně, ...

....

....

....

h) Vše ilustrujte pro $A =$ množina všech čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{R}$, $B = \mathbb{C}$ a $\alpha(X)$ je determinant matice X.

....

....

Algebra II, 2. termín, úloha B, 2. 6. 2004

Jméno : **UČO :**

Nechť $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je uspořádaná množina. $\emptyset \neq P \subseteq A$ se nazývá *usměrněná*, ex.-li pro libovolná $a, b \in P$ prvek $c \in P$ takový, že $a \leq c$, $b \leq c$. Samo $\mathcal{A}$ se naz. *CPO* (complete partially ordered set), má-li nejmenší prvek, který značíme $\perp$, a má-li lib. usměrněná podmnožina v $\mathcal{A}$ suprémum. Nechť $\mathcal{B} = (B, \leq)$ je další CPO. Zobrazení $\alpha : A \to B$ se naz. *spojité*, je-li pro lib. usměrněnou množinu P v $\mathcal{A}$ splněno $\alpha(\bigvee P) = \bigvee\{\alpha(a) \mid a \in P\}$.

a) Dokažte, že každé spojité zobrazení je izotonní.

....

....

b) Nechť $\mathcal{A}$ je CPO a nechť α je izotonní zobrazení $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}$. Ukažte, že existuje $\overline{\alpha} = \bigvee\{\ \alpha^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\ \}$.

....

....

c) Ukažte, že je-li $\overline{\alpha}$ pevný bod α (t.j. $\alpha(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}$), je nejmenším pevným bodem α.

....

....

d) Ukažte, že pro spojité α je $\overline{\alpha}$ pevný bod zobrazení α.

....

....

e) Nechť T značí množinu všech parciálních transformací množiny $\mathbb{N}_0$ (t.j. všech zobrazení podmnožin $\mathbb{N}_0$ do množiny $\mathbb{N}_0$). Pro $f, g \in T$ klademe $f \leq g$, je-li $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathsf{dom}\, g$ a f a g souhlasí na $\mathsf{dom}\, f$. Ukažte, že $(T, \leq)$ je CPO.

....

....

f) Definujme $\alpha : T \to T$ vztahem

$$(\alpha(f))(k) = \begin{cases} 1, \quad k = 0 \\ k \cdot f(k-1), \quad k \geq 1 \text{ a } f(k-1) \text{ definováno} \\ \text{nedefinováno}, \quad \text{jinak} \end{cases}$$

Ukažte, že α je spojité.

....

....

g) Spočtěte $\overline{\alpha}$.

....

....

Algebra II, 2. termín, úloha C, 2. 6. 2004

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech úplných svazů uvažovaná v jazyce binárních $\wedge$ a $\vee$ uzavřená na operátor S ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Jsou svazy $(\mathbb{Z}, \wedge, \vee)$ a $(\mathbb{Z}, \vee, \wedge)$ izomorfní ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme relaci ρ vztahem

$$a \; \rho \; b \iff a + b = 0 \; .$$

Je tato relace kongruencí grupy $(\mathbb{Z}, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha A, 16.6. 2004

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk unárního operačního symbolu o. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Nechť $\mathcal{A}_i = (A_i, f_i),\ i \in I$, je systém monounárních algeber. Na množině

$\prod_{i\in I} A_i = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

definujeme operaci f vztahem

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou algebry s neprázdnými nosiči a nechť $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ splňuje identitu σ. U jednotlivých tvrzení vyznačte zda platí či nikoliv.

(i) $\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ, (ii) $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňuje σ, (iii) ani $\mathcal{A}$ ani $\mathcal{B}$ nemusí splňovat σ.

c) Vyznačte co platí a co neplatí

(i) Nechť $\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ. Pak i $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ splňuje σ.

(ii) Nechť $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňuje σ. Pak i $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ splňuje σ.

d) Doplňte a dokažte. Nechť $(\rho_i)_{i\in I},\ I \neq \emptyset$ je systém kongruencí algebry $\mathcal{A} = (A, f)$ takový, že

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pak $\mathcal{A}$ je izomorfní s podpřímým součinem systému $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e) Jak poznáme podle svazu $\mathsf{Con}\,\mathcal{A}$ podpřímou nerozložitelnost konečné algebry $\mathcal{A}$?

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f) Pro která $n \in \mathbb{N}$ je $(\mathbb{Z}_n, f),\ f(a) = a + 1 \pmod{n}$ podpřímo nerozložitelná ?

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Algebra II, 3. termín, úloha B, 16.6. 2004

Jméno : **UČO :**

Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz, nechť I je jeho ideál (t.j. (i) $I \subseteq L$, (ii) $a, b \in I$ dá $a \vee b \in I$, (iii) $a \in I,\ b \in L,\ b \leq a$ dá $b \in I$) a F je jeho filtr (duální pojem k pojmu ideál). Nechť platí $I \cup F = L,\ I \cap F \neq \emptyset$.

a) Dokažte : Je-li K podsvaz svazu $\mathcal{L}$ izomorfní s M_5, pak $K \subseteq I$ nebo $K \subseteq F$.

....

....

....

b) Nechť $p \in I,\ q \in F,\ p \leq q$. Pak existuje $r \in I \cap F$ takové, že $p \leq r \leq q$. Návod : uvažte $p \vee (q \wedge s)$ pro $s \in I \cap F$.

....

....

....

c) Dokažte : Je-li N podsvaz svazu $\mathcal{L}$ izomorfní s N_5, pak buď I nebo F má podsvaz izomorfní s N_5. Návod : ukažte, že stačí uvažovat případ $a, b \in I,\ c \in F$, zvolte r z bodu b) pro $p = b,\ q = 1$ a uvažujte dvě možnosti

(i) $a \vee (c \wedge r) = b \vee (c \wedge r)$.

....

....

....

(ii) neplatí (i).

....

....

....

d) Dokažte, že $\mathcal{L}$ je modulární právě tehdy když I i F jsou modulární. (Můžete použít větu "$\mathcal{L}$ je modulární právě tehdy když neobsahuje podsvaz izomorfní s ………").

....

....

....

....

Algebra II, 3. termín, úloha C, 16.6. 2004

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech těles uvažovaná v jazyce binárních $+$ a $\cdot$ uzavřená na operátor P ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť $M_2(\mathbb{R})$ značí množinu všech čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{R}$. Je zobrazení $A \mapsto |A|$ homomorfismem $(M_2(\mathbb{R}), +)$ do $(\mathbb{R}, +)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{R}[x]$ definujeme relaci ρ vztahem

$$f \ \rho \ g \iff \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx \ .$$

Je tato relace kongruencí grupy $(\mathbb{R}[x], +)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 1. termín, úloha A, 31.5. 2005

Jméno : **UČO :**

Reprezentace konečných distributivních svazů

a) Algebraicky definovaný svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svazem ve smyslu uspořádaných množin, klademe-li

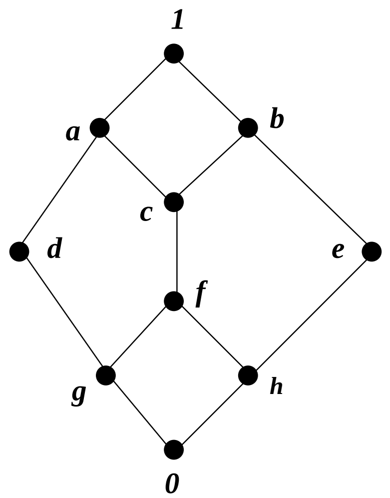
$$a \leq b \iff \text{...} \; .$$

b) Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz. Prvek $a \in L$ je spojově ireducibilní, jestliže

....

Množinu všech spojově ireducibilních prvků svazu $\mathcal{L}$ s vyjímkou nejmenšího (pokud existuje) značíme $\mathsf{J}(\mathcal{L})$.

c) Nakreslete diagram uspořádané množiny $(\mathsf{J}(\mathcal{K}), \leq)$ pro svaz $\mathcal{K}$



d) Nechť $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je uspořádaná množina. Množina $X \subseteq A$ je dědičná, jestliže

....

Množinu všech dědičných podmnožin značíme $\mathsf{H}\,(\mathcal{A})$.

e) Doplňte větu : Konečný distributivní svaz $\mathcal{L} = (L, \leq)$ je izomorfní s množinou

....

s uspořádáním ....

f) Doplnění důkazu : Uvažujeme zobrazení

$$\xi : L \to \text{................,} \;\; a \mapsto \text{..............................}$$

Vzhledem k tomu, že svaz $\mathcal{L}$ je ...., platí pro lib. $a \in L$, že $a = \sup \xi(a)$.

Odtud zejména plyne, že zobrazení ξ je .... a že platí $\xi(a) \leq \xi(b)$ implikuje $a \leq b$.

Zřejmě též $a \leq b$ dá ....

Zbývá ukázat, že zobrazení ξ je ....

Skutečně, nechť $X = \{$................................$\} \in$ ....

Položme $a = \sup X$. Pak $\xi(a) \supseteq X$. Nechť konečně $y \in \xi(a)$. Pak

....

....

....

g) Uveďte diagram uspořádané množiny, kterou jste doplnili do e), pro náš konkrétní příklad svazu $\mathcal{K}$.

h) Sledujte důkaz z f) a uveďte **zcela konkrétně**, co v případě svazu $\mathcal{K}$ neprošlo.

Algebra II, 1. termín, úloha B, 31.5. 2005

Jméno : **UČO :**

1. Kongruence grup

a) Relace ρ je kongruencí grupy $\mathcal{G} = (G, \cdot, e, ^{-1})$ jestliže .....

b) Jak přecházíme od kongruencí k normálním podgrupám ? Dokažte korektnost.

c) Jak přecházíme od normálních podgrup ke kongruencím ? Dokažte korektnost.

d) Dokažte, že uvedené přechody jsou vzájemně inverzní.

e) Dokažte, že v obou případech dostáváme stejnou faktorovou strukturu.

f) Najděte všechny kongruence grupy $(S_3, \circ, id, ^{-1})$.

Algebra II, 1. termín, úloha C, 31.5. 2005

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech biunárních algeber tvaru (A, f, f) uzavřená na operátor H ?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Jsou uspořádané množiny $(\mathbb{Z}, \leq)$ a $(\mathbb{Q}, \leq)$ izomorfní ?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Nechť $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ značí množinu všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$. Je zobrazení

$$\alpha : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0,\ X \mapsto |X|$$

homomorfismem svazu $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \subseteq)$ do svazu $(\mathbb{N}_0, \leq)$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 9.6. 2005

Jméno : **UČO :**

Identity v biunárních algebrách

Uvažujeme jazyk dvojice unárních operačních symbolů f a g a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, p, q)$ a $\mathcal{B} = (B, r, s)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka. (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

....

b) Nechť $M = \{f, g\}^*$ je volný monoid nad množinou $\{f, g\}$. Prvky T_n lze psát ve tvaru

....

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

....

d) Zobrazení α : .... je homomorfismem algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{B}$, platí-li

....

e) Je-li navíc $a_1, \ldots, a_n \in A$, máme $\alpha(t^{\mathcal{A},n}(a_1, \ldots, a_n)) =$ ....

f) Dokažte tvrzení z e).

....

....

g) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$ a nechť α je

....

Pak ....

h) Dokažte tvrzení z g).

....

....

i) Nechť algebra $\mathcal{A}$ je konkretizována takto: $A = \{0, 1, 2\},\ p(0) = 1,\ p(1) = 2,\ p(2) = 0,\ q(0) = 2,\ q(1) = 0,\ q(2) = 1$. Charakterizujte identity, které jsou v $\mathcal{A}$ splněny

....

j) Nechť $\mathcal{A}$ je jako v bodě i). Charakterizujte identity, které nejsou v $\mathcal{A}$ splněny

....

Algebra II, 2. termín, úloha B, 9.6. 2005

Jméno : **UČO :**

Pseudokomplementární svazy

Svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ s nejmenším prvkem, ozn. 0, se nazývá ***pseudokomplementární*** jestliže pro libovolné $a \in L$ existuje $a^* \in L$ tak, 6e

$$a \wedge b = 0 \iff b \leq a^* \ .$$

Dokažte

(a) Každý Booleovský svaz je pseudokomplementární.

(b) Každý omezený řetězec je pseudokomplementární.

(c) Každý konečný distributivní svaz je pseudokomplementární. (Návod: asi se Vám bude hodit množina $C = \{\ b \in L \mid a \wedge b = 0\ \}$.)

(d) Dejte příklad konečného omezeného svazu, který není pseudokomplementární.

(e) Dejte příklad omezeného distributivního svazu, který není pseudokomplementární.

Algebra II, 2. termín, úloha C, 9.6. 2005

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech unárních algeber tvaru (A, f) s prostým f uzavřená na operátor H ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Jsou pologrupy $(\mathbb{R}, \cdot)$ a $(\{a \in \mathbb{R} \mid a \leq 0\}, +)$ izomorfní ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{Z}$ definujeme relaci ρ vztahem

$$a \; \rho \; b \iff |a| = |b| \; .$$

Je tato relace kongruencí grupoidu $(\mathbb{Z}, +)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha A, 17.6. 2005

Jméno : **UČO :**

Dvojí definice polosvazů

a) $\mathcal{A} = (A, \rho),\ \rho \subseteq A \times A$ je průsekový polosvaz jestliže …

b) $\mathcal{L} = (L, \cdot),\ \cdot : L \times L \to L$ je polosvaz jestliže …

c) Jak se polosvaz podle a) modifikuje na polosvaz podle b) ? - vše dokažte.

d) Jak to konkrétně vypadá pro $(\mathbb{Z}, \geq)$?

e) Jak se polosvaz podle b) modifikuje na polosvaz podle a) ? - vše dokažte.

f) Jak to konkrétně vypadá pro $(\mathbb{N}, \mathrm{nsn})$?

g) Ukažte, že vaše přechody z c) a e) jsou vzájemně inverzní.

Algebra II, 3. termín, úloha B, 17.6. 2005

Jméno : **UČO :**

Volná algebra

Rektangulární band je idempotentní pologrupa splňující identitu $xyz = xz$.

a) Identita $x_{i_1} \dots x_{i_k} = x_{j_1} \dots x_{j_l}$ je splněna ve všech rektangulárních bandech právě když

. . . .

b) Dokažte, že množina $F = M \times M$ spolu s operací

$$(a, b) \circ (c, d) = \dots\dots\dots\dots$$

je volný rektangulární band nad množinou M vzhledem k $\iota : a \mapsto$ ....

(i) $(F, \circ)$ je rektangulární band :

. . . .

. . . .

. . . .

(ii) Množina $\iota(M)$ generuje $(F, \circ)$, neboť libovolný prvek množiny F lze psát jako

. . . .

(iii) Nechť $(S, \star)$ je rektangulární band a nechť $\alpha : M \to S$ je zobrazení. Položme

$\beta : F \to S$, ... $\mapsto$ ....

Zobrazení β je homomorfismus, neboť

. . . .

. . . .

Konečně $\beta\iota =$ ...., neboť . . . .

c) Kolik má pologrupa F prvků pro $|M| = n \in \mathbb{N}$?

. . . .

Algebra II, 2. termín, úloha C, 17. 6. 2005

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech unárních algeber tvaru (A, f) se surjektivním f uzavřená na operátor S ? (Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Pro $a, b \in \mathbb{C}$ klademe

$$a \ \rho \ b \iff |a| = |b| \ .$$

Je relace ρ kongruencí pologrupy $(\mathbb{C}, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Nechť $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ značí množinu všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$. Je zobrazení

$$\alpha : \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}_0, \ X \mapsto |X|$$

izotonním zobrazením svazu $(\mathcal{P}_f(\mathbb{N}), \subseteq)$ do svazu $(\mathbb{N}_0, \leq)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 1. termín, úloha A, 31.5. 2006

Jméno : **UČO :**

Identity v biunárních algebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk dvojice unárních operačních symbolů f a g a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, p, q)$ a $\mathcal{B} = (B, r, s)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka.

. . . .

b) Nechť $M = \{f, g\}^*$ je volný monoid nad množinou $\{f, g\}$. Prvky T_n lze psát ve tvaru

. . . .

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

. . . .

d) Zobrazení α : .... je homomorfismem algebry $\mathcal{A}$ do algebry $\mathcal{B}$, platí-li

. . . .

e) Je-li navíc $t \in T_n,\ a_1, \dots, a_n \in A$, máme $\alpha(t^{\mathcal{A},n}(a_1, \dots, a_n)) =$ ....

f) Dokažte tvrzení z e).

. . . .

. . . .

g) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$ a nechť α je

. . . .

Pak . . . .

h) Dokažte tvrzení z g).

. . . .

. . . .

i) Nechť algebra $\mathcal{A}$ je konkretizována takto: $A = \{0, 1, 2\},\ p(0) = 1,\ p(1) = 2,\ p(2) = 0,\ q(0) = 2,\ q(1) = 0,\ q(2) = 1$. Charakterizujte identity, které jsou v $\mathcal{A}$ splněny

. . . .

j) Nechť $\mathcal{A}$ je jako v bodě i). Charakterizujte identity, které nejsou v $\mathcal{A}$ splněny

. . . .

Algebra II, 1. termín, úloha B, 31.5. 2006

Jméno : **UČO :**

Polomodulární svazy.

Pro uspořádanou množinu $\mathcal{A} = (A, \leq)$ označujeme relaci pokrývání symbolem $\sqsubset$. Řetězec $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ je *maximální*, je-li $x_0 \sqsubset x_1 \sqsubset \ldots \sqsubset x_n$.

Výškou prvku a konečné uspořádané množiny $\mathcal{A} = (A, \leq)$ s nejmenším prvkem 0 nazýváme maximální z délek řetězců mezi 0 a a.

Graduací uspořádané množiny $\mathcal{A} = (A, \leq)$ rozumíme zobrazení $g : A \to \mathbb{Z}$ takové, že

$$(i)\ a < b \ \Rightarrow\ g(a) < g(b) \text{ a } (ii)\ a \sqsubset b \ \Rightarrow\ g(a) \sqsubset g(b)\ .$$

Svaz $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je *polomodulární*, platí-li

$$(\ \forall\, a, b, c \in A\ )\ (\ a \neq b,\ c \sqsubset a,\ c \sqsubset b \ \ \Rightarrow\ \ a \sqsubset a \vee b,\ b \sqsubset a \vee b\ )\ .$$

Dokažte :

a) Libovolný modulární svaz je polomodulární.

b) V konečném polomodulárním svazu mají libovolné dva maximální řetězce mezi danými $a < b$ stejnou délku. (Pozorně formulujte výrok $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$, který posléze řádně dokážete indukcí.)

c) V konečném polomodulárním svazu je funkce výšky graduací.

Pro labužníky :

d) Konečný svaz je polomodulární, právě když jeho funkce výšky je graduací splňující

$$(\ \forall\, a, b \in A\ )\ h(a) + h(b) \geq h(a \wedge b) + h(a \vee b)\ .$$

Algebra II, 1. termín, úloha C, 31.5. 2006

Jméno : **UČO :**

a) Množina $\mathsf{P}(A)$ všech podmnožin množiny A tvoří vzhledem k "přirozeným" operacím Booleovu algebru. Je $\mathsf{P}(\mathbb{Q})$ podalgebrou algebry $\mathsf{P}(\mathbb{R})$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Uvažujme algebru $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, s)$, kde $s(a) = a + 1$. Je relace

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \iff a = d$$

kongruencí algebry $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je zobrazení

$$\alpha : \mathbb{Z}[x, y] \to \mathbb{Z},\ f \mapsto \text{ absolutní hodnota absolutního členu } f$$

homomorfismem okruhu $(\mathbb{Z}[x, y], +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$?
(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 13.6. 2006

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk dvou binárních operačních symbolů $\wedge$, $\vee$. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Připomeňte definici součinu systému množin $(A_i)_{i\in I}$. (I je libovolná množina !)

....

b) Algebra $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ je součinem systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, \wedge_i, \vee_i))_{i\in I}$, jestliže

....

....

c) Algebra $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ je podpřímým součinem systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, \wedge_i, \vee_i))_{i\in I}$, jestliže

....

....

d) Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou algebry s neprázdnými nosiči a nechť $\mathcal{C}$ je jejich podpřímý součin. Nechť σ je identita. U jednotlivých tvrzení vyznačte zda platí či nikoliv.

(i) ($\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ) $\implies$ $\mathcal{C}$ splňuje σ,
(ii) ($\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňují σ) $\implies$ $\mathcal{C}$ splňuje σ,
(iii) $\mathcal{C}$ splňuje σ $\implies$ ($\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ),
(iv) $\mathcal{C}$ splňuje σ $\implies$ ($\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňují σ).

e) Doplňte a dokažte. Nechť $\mathcal{A}$ je podpřímým součinem systému $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$.

Pak $\bigcap_{i\in I}$ ker..................

....

....

....

f) Algebra $\mathcal{A}$ je podpřímo nerozložitelná, platí-li

....

....

g) Pro která $n \in \mathbb{N}$ je svaz $(\{1, \ldots, n\}, \leq)$ podpřímo nerozložitelný ?

....

h) Dokažte tvrzení z g).

....

....

Algebra II, 2. termín, úloha B, 13.6. 2006

Jméno : **UČO :**

Kongruence svazů

Dokažte, že svaz $(\mathsf{Con}\,\mathcal{L}, \subseteq)$ všech kongruencí svazu $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je distributivní.
Doplňte důkaz.
Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{Con}\,\mathcal{L}$, $a, b \in L, (a, b) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Ukážeme, že

$$(a, b) \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ .$$

Nechť tedy $a\alpha b$. Ex. $n \in \mathbb{N}$, $c_0, ..., c_{2n} \in L$ tak, že

$$a = c_0 \ \beta \ c_1 \ \gamma \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ .$$

Pro $x, y, z \in L$ klademe

$$m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) \ .$$

Ukažte, že $m(x, x, y) = x$:

....

Pro lib. c je $m(a, a, c) \ \alpha \ m(a, ..., c)$. Dále pro lib. c, c' platí $m(a, b, c)$.....$m(a, b, c')$, neboť

....

Dále $c \ \beta \ c'$ dá $m(a, b, c)\beta$ ....

a podobně ....

Platí $m(a, b, c_0) =$ ...., $m(a, b, c_{2n}) =$ ....

Konečně použijeme posloupnost

$$m(a, b, c_0), ..., m(a, b, c_{2n}) \ .$$

Algebra II, 2. termín, úloha C, 13.6. 2006

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech biunárních algeber (A, f, g) splňujících $f \neq g$ uzavřená na operátor H ? (Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Jsou struktury

$$(\{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}, \cdot\,) \quad \text{a} \quad (\mathbb{R}, +)$$

izomorfní ? (Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Nechť $\mathsf{P}(\mathbb{N}_0)$ značí množinu všech neprázdných podmnožin množiny $\mathbb{N}_0$. Rozhodněte, zda zobrazení

$$\alpha : \mathsf{P}(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{N}_0,\ X \mapsto \mathrm{card} X$$

je grupoidový homomorfismus

$$(\mathsf{P}(\mathbb{N}_0), \cap) \to (\mathbb{N}_0, \min)\ ?$$

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha A, 23.6. 2006

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk jediného unárního operačního symbolu f. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Definujte homomorfismus.

b) Definujte podalgebru.

c) Definujte kongruenci.

d) Definujte faktorovou algebru a tzv. přirozený homomorfismus.

e) Dokažte, že pro homomorfismus $\alpha : (A, g) \to (B, h)$ je $\ker \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ kongruencí algebry $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Skutečně,

f) Ukažte, že $\mathsf{im}\, \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ je podalgebrou algebry $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Skutečně,

g) Doplňte a dokažte : lib. homomorfismus $\alpha : (A, g) \to (B, h)$ lze psát ve tvaru $\alpha = \iota\beta(\ker \alpha)^\sharp$, kde

Skutečně,

h) Vše ilustrujte na příkladě $\mathcal{A} = (\{0, 1, \ldots, 5, a, b\}, g)$, $\mathcal{B} = (\{p, q, r, s\}, h)$, kde $g(b) = a, g(a) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2, \ldots, g(5) = 0$, $h(p) = q, h(q) = r, h(r) = q, h(s) = r$ a α je rozšířením $b \mapsto q$.

Algebra II, 3. termín, úloha B, 23.6. 2006

Jméno : **UČO :**

a) Dokažte, že každý komplementární modulární svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je relativně komplementární (= libovolný jeho interval $[\,a, b\,] = \{\, c \in L \mid a \leq c \leq b \,\}$, $a, b \in L$, $a \leq b$ je komplementární).

Návod: Dokažte nejprve, že intervaly tvaru $[\,0, p\,]$ jsou komplementární. Pak vhodně použijte dualitu.

b) Dejte příklad svazu, který je komplementární, ale není relativně komplementární.

c) Dokažte, že v omezeném distributivním svazu je množina všech jeho prvků majících komplement podsvazem.

d) Dejte příklad 8-mi prvkového omezeného distributivního svazu, v němž právě 4 prvky mají komplement.

Body: 10,5,10,5.

Algebra II, 3. termín, úloha C, 23.6. 2006

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech cyklů $(A, f),\ f : A \to A$ uzavřená na operátor P ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Jsou svazy

$$(\mathbb{Z}, \leq) \quad \text{a} \quad (\mathbb{Q}, \leq)$$

izomorfní ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Je zobrazení

$$\alpha : \mathbb{Q}[x, y] \to \mathbb{Q},\ f \mapsto \text{ absolutní hodnota absolutního členu } f$$

homomorfismem pologrupy $(\mathbb{Q}[x, y], \cdot)$ do pologrupy $(\mathbb{Q}, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 1. termín, úloha A, 28. 5. 2007

Jméno : **UČO :**

Identity v podalgebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk unárního operačního symbolu f a nulárního operačního symbolu c a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, p, d)$ a $\mathcal{B} = (B, q, e)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka.

....

b) Lze termy psát v nějakém kompaktním tvaru ?

....

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

....

d) Algebra $\mathcal{B}$ je podalgebrou algebry $\mathcal{A}$, platí-li

....

e) Je-li navíc $t \in T_n$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, máme $t^{\mathcal{B},n}(b_1, \ldots, b_n) =$ ....

f) Dokažte tvrzení z e).

....

....

g) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$. Pak též

....

h) Dokažte tvrzení z g).

....

....

i) Nechť algebra $\mathcal{A}$ je konkretizována takto: $A = \{0, 1, 2\}$, $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 0$, $d = 0$. Charakterizujte identity, které jsou v $\mathcal{A}$ splněny

....

j) Nechť $\mathcal{A}$ je jako v bodě i). Charakterizujte identity, které nejsou v $\mathcal{A}$ splněny

....

Algebra II, 1. termín, úloha B, 28. 5. 2007

Jméno : **UČO :**

Pevné body

Knaster-Tarski: Nechť $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je ..... a nechť $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je ...... Pak existuje $a \in A$ tak, že $\alpha(a) = a$. (Bylo na přednášce.)

Banach: Nechť A, B jsou množiny a nechť $\alpha : A \to B,\ \beta : B \to A$ jsou zobrazení. Pak existuje rozklad množiny A na podmnožiny A_1, A_2 a rozklad množiny B na podmnožiny B_1, B_2 tak, že $\alpha(A_1) = B_1,\ \beta(B_2) = A_2$.

Schröder-Bernstein: Nechť A, B jsou množiny a nechť $\alpha : A \to B,\ \beta : B \to A$ jsou prostá zobrazení. Pak existuje bijekce množiny A na množinu B.

Úkoly:

(a) Doplňte KT-větu.

Nyní dokažte B-větu užitím KT-věty. Můžete použít zobrazení

$$\phi : 2^A \to 2^A,\ X \mapsto A \setminus \beta(B \setminus \alpha(X)) \ .$$

(b) Zřejmě je $(2^A, \subseteq)$ .... Dokažeme, že ϕ je

(c) Skutečně,

(d) Položíme

(e) Pak skutečně

(f) Dokažte SB-větu použitím B-věty.

Body : 3, 2, 9, 6, 4, 6

Algebra II, 1. termín, úloha C, 28. 5. 2007

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech svazů obsahujících nejmenší prvek, uvažovaná v jazyku dvou binárních operačních symbolů, uzavřena na operátor S ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Na množině $\mathbb{Z}$ uvažujeme unární oprace s, t definované takto: $s(x) = x+1$, $t(x) = x-1$ pro $x \in \mathbb{Z}$.

Je 2-unární algebra $(\mathbb{Z}, s, t)$ izomorfní algebře $(\mathbb{Z}, t, s)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Označme $\mathbb{P}'$ množinu všech neprázdných konečných podmnožin množiny $\mathbb{Q}$. Je zobrazení $\varphi : \mathbb{P}' \to \mathbb{Q}$ definované vztahem

$$\varphi(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

homomorfismus grupoidů $(\mathbb{P}', \cup)$ a $(\mathbb{Q}, +)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 7. 6. 2007

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk unárního operačního symbolu f a nulárního operačního symbolu c. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !) Nechť $\mathcal{A} = (A, g, d)$, $\mathcal{B} = (B, h, e)$ jsou algebry našeho jazyka.

a) Definujte homomorfismus.

b) Definujte podalgebru.

c) Definujte kongruenci.

d) Definujte faktorovou algebru a tzv. přirozený homomorfismus.

e) Dokažte, že pro homomorfismus $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je $\ker \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ kongruencí algebry $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Skutečně,

f) Ukažte, že $\mathsf{im}\, \alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ je nosičem podalgebry algebry $\ldots$.

Skutečně,

g) Doplňte a dokažte : libovolný homomorfismus $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lze psát ve tvaru $\alpha = \iota \circ \beta \circ (\ker \alpha)^\sharp$, kde ι, β jsou definovány vztahy :

a mají následující vlastnosti :

Dokažte korektnost definice zobrazení β :

h) Části e) - g) ilustrujte na příkladě $\mathcal{A} = (\{0, 1, \ldots, 5, a, b\}, g, 0)$, $\mathcal{B} = (\{p, q, r, s\}, h, q)$, kde $g(b) = a, g(a) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2, \ldots, g(5) = 0$, $h(p) = q, h(q) = r, h(r) = q, h(s) = q$. Zvolte si libovolný homomorfismus α.

Algebra II, 2. termín, úloha B, 7. 6. 2007

Jméno : **UČO :**

Booleův okruh je okruh $(R, +, \cdot, 0)$ s idempotentním násobením. V jazyku máme binární $+$ a $\cdot$ a nulární 0.

a) Libovolný booleův okruh splňuje identitu $xy + yx = 0$. Skutečně, pro libovolná $a, b \in R$ máme

$$\cdots = (a+b)^2 = \ldots$$

a tedy ....

b) Libovolný booleův okruh splňuje identitu $x + x = 0$. Skutečně, v a) stačí položit

....

c) Libovolný booleův okruh je komutativní. Skutečně,

....

....

Nechť $(B, \wedge, \vee, \perp, \top, ')$ je booleova algebra. Pro $a, b \in B$ klademe

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b), \; a \cdot b = a \wedge b, \; 0 = \ldots .$$

d) Dokažte, že $(B, +, \cdot, 0)$ je booleův okruh. (Při ověřování asociativity sčítání upravte pouze jednu ze stran tak, aby tam nebylo $+$; zbytek si dopočítáte doma.)

Pokud nemůže dojít k nedorozumění, pokročilí algebraici (a to jste přece i Vy !) nerozlišují mezi operačními symboly a jejich realizacemi.

Body : 5, 5, 5, 15

Algebra II, 2. termín, úloha C, 7. 6. 2007

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech 2-unárních algeber (A, f, g), takových, že f a g jsou vzájemně inverzní bijekce, uzavřena na operátor S ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Na množině $\mathbb{N}$ uvažujeme relaci ρ definovanou takto :

$$(x, y) \in \rho \iff x \text{ a } y \text{ mají stejný počet cifer v dvojkovém zápise.}$$

Je ρ kongruence svazu $(\mathbb{N}, \min, \max)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Označme s unární operaci definovanou na množině $\mathbb{Q}$ takto: $s(x) = x+1$ pro lib $x \in \mathbb{Q}$. Je zobrazení $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ dané vztahem $\varphi(p, q) = \frac{p}{q}$ homomorfismem unárních algeber $(\mathbb{Z}, s|_{\mathbb{Z}}) \times (\mathbb{N}, s|_{\mathbb{N}})$ a $(\mathbb{Q}, s)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha A, 26. 6. 2007

Jméno : **UČO :**

Reprezentace konečných distributivních svazů

a) Algebraicky definovaný svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svazem ve smyslu uspořádaných množin, klademe-li

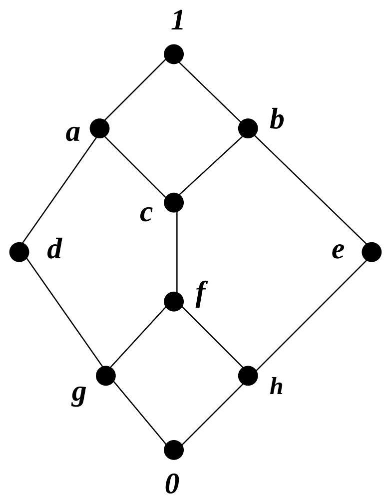
$$a \leq b \iff \text{..} .$$

b) Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz. Prvek $a \in L$ je spojově ireducibilní, jestliže

....

Množinu všech spojově ireducibilních prvků svazu $\mathcal{L}$ s vyjímkou nejmenšího (pokud existuje) značíme $\mathsf{J}(\mathcal{L})$.

c) Nakreslete diagram uspořádané množiny $(\mathsf{J}(\mathcal{K}), \leq)$ pro svaz $\mathcal{K}$



d) Nechť $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je uspořádaná množina. Množina $X \subseteq A$ je dědičná, jestliže

....

Množinu všech dědičných podmnožin značíme $\mathsf{H}(\mathcal{A})$.

e) Doplňte větu : Konečný distributivní svaz $\mathcal{L} = (L, \leq)$ je izomorfní s množinou

....

s uspořádáním ....

f) Doplnění důkazu : Uvažujeme zobrazení

$$\xi : L \to \text{.................,} \ \ a \mapsto \text{..............................}$$

Vzhledem k tomu, že svaz $\mathcal{L}$ je ...., platí pro lib. $a \in L$, že $a = \sup \xi(a)$.

Odtud zejména plyne, že zobrazení ξ je .... a že platí $\xi(a) \leq \xi(b)$ implikuje $a \leq b$.

Zřejmě též $a \leq b$ dá ....

Zbývá ukázat, že zobrazení ξ je ....

Skutečně, nechť $X = \{$.................................$\} \in$ ....

Položme $a = \sup X$. Pak $\xi(a) \supseteq X$. Nechť konečně $y \in \xi(a)$. Pak

....

....

....

g) Uveďte diagram uspořádané množiny, kterou jste doplnili do e), pro náš konkrétní příklad svazu $\mathcal{K}$.

h) Sledujte důkaz z f) a uveďte **zcela konkrétně**, co v případě svazu $\mathcal{K}$ neprošlo.

Algebra II, 3. termín, úloha B, 26. 6. 2007

Jméno : **UČO :**

Syntaktický semiring

Nechť $A = \{a, b\},\ a \neq b$. Nechť $(A^*, \cdot)$ je volný monoid nad A a nechť P je množina všech konečných podmnožin množiny A^* s násobením

$$\{u_1, \ldots, u_k\} \cdot \{v_1, \ldots, v_l\} = \{u_1v_1, \ldots, u_1v_l, \ldots, u_kv_1, \ldots, u_kv_l\}\ .$$

a) Definujte kongruenci algebry $\mathcal{P} = (P, \cdot, \cup)$.

b) Nechť $L \subseteq A^*$. Ukažte, že relace $\sim_L$ definovaná vztahem

$$\{u_1, \ldots, u_k\} \sim_L \{v_1, \ldots, v_l\} \iff$$

$$(\ \forall\ p, q \in A^*\ )\ (\ pu_1q, \ldots, pu_kq \in L \iff pv_1q, \ldots, pv_lq \in L\ )$$

je kongruencí algebry $\mathcal{P}$.

c) Jak vypadá $\mathcal{P}/\sim_L$ pro $L = \{a^n \mid n \geq 0\}$?

d) Pro $n \in \mathbb{N}$ v $\mathcal{P}$ určete $< \{a^n\} >$.

e) Najděte všechny automorfismy algebry $\mathcal{P}$.

f) Pro která $r, s, t \geq 0$ algebra $\mathcal{P}$ splňuje identitu $x^r(y \cup z) = x^s y \cup x^t z$? – zdůvodněte

Body : 5, 5, 5, 15

Algebra II, 3. termín, úloha C, 26. 6. 2007

Jméno : **UČO :**

a) O prvku a grupoidu $(S, \cdot)$ řekneme, že je levá nula, pokud platí $(\forall x \in S)(a \cdot x = a)$. Je třída všech grupoidů, které obsahují levou nulu, uzavřena na operátor H ?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Označme s unární operaci definovanou na množině $\mathbb{Z}$ takto: $s(x) = x+1$ pro lib $x \in \mathbb{Z}$. Je relace ρ definovaná na množině $\mathbb{Z}$ vztahem

$$(a, b) \in \rho \iff a = b \ \vee \ ab > 0$$

kongruencí unární algebry $(\mathbb{Z}, s)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Označme $\mathbb{P}_f(\mathbb{N})$ množinu všech konečných podmnožin množiny $\mathbb{N}$.
Je svaz $(\mathbb{P}_f(\mathbb{N}), \cup, \cap)$ izomorfní svazu $(\mathbb{P}_f(\mathbb{N}), \cap, \cup)$?
(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.