Algebra II, 1. termín, úloha A, 3.6. 2010

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk jediného unárního operačního symbolu f. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Připomeňte definici součinu systému množin $(A_i)_{i\in I}$. (I je libovolná množina !)

....

b) Algebra $\mathcal{A} = (A, g)$ je *součinem* systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, g_i))_{i\in I}$, jestliže

....

....

c) Algebra $\mathcal{A} = (A, g)$ je *podpřímým součinem* systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, g_i))_{i\in I}$, jestliže

....

....

d) Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou algebry s neprázdnými nosiči a nechť $\mathcal{C}$ je jejich podpřímý součin. Nechť σ je identita. U jednotlivých tvrzení vyznačte zda platí či nikoliv.

(i) ($\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ) $\implies$ $\mathcal{C}$ splňuje σ,

(ii) $\mathcal{C}$ splňuje σ $\implies$ ($\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ),

(iii) ($\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňují σ) $\implies$ $\mathcal{C}$ splňuje σ,

(iv) $\mathcal{C}$ splňuje σ $\implies$ ($\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňují σ).

e) Doplňte a dokažte. Nechť $\mathcal{A}$ je podpřímým součinem systému $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$.

Pak $\bigcap_{i\in I}$ ker..................

....

....

....

f) Algebra $\mathcal{A}$ je *podpřímo nerozložitelná*, platí-li

....

....

g) Netriviální algebra $\mathcal{A}$ je podpřímo nerozložitelná právě když po odstranění nejmenšího prvku ze svazu všech kongruencí algebry $\mathcal{A}$ vznikne

....

h) Nechť $\mathcal{M}_n$ je svaz s nejmenším prvkem 0, největším prvkem 1 a dalšími n po dvou nesrovnatelnými prvky $a_1, \ldots, a_n$. Pro která $n \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{M}_n$ podpřímo nerozložitelná ? Tvrzení zdůvodněte.

....

....

i) Rozložte n-prvkový řetězec na podpřímý součin podpřímo nerozložitelných svazů.

....

....

Algebra II, 1. termín, úloha B, 3.6. 2010

Jméno : **UČO :**

Báze ve svazech

Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz. Nechť $\mathsf{J}(\mathcal{L})$ značí množinu všech jeho spojově ireducibilních prvků. Množina $S \subseteq \mathsf{J}(\mathcal{L})$ (může být nekonečná) se nazývá *bazí* prvku $a \in L$, je-li $a = \sup S$ a platí-li

$$(\ \forall\ s \in S \ ) \ \ \sup(S \setminus \{s\}) \neq a \ .$$

a) Ukažte, že v libovolné bázi prvku a nemohou být dva různé srovnatelné prvky.

....

b) Nechť $\mathcal{L}$ je distributivní bez nekonečných řetězců. Ukažte, že množina $\mathsf{J}(\mathcal{L})$ je konečná.

Důkaz: Nechť C je maximální řetězec v $\mathcal{L}$. Definujeme zobrazení $\varphi : \mathsf{J}(\mathcal{L}) \to C$ vztahem $x \mapsto \inf(\{y \in L \mid x \leq y\} \cap C)$ a ukážeme, že je prosté. Nechť tedy $x, y \in \mathsf{J}(\mathcal{L})$, $\varphi(x) = \varphi(y) = a$. Prvek z C pokrytý prvkem a označme b. Pro zbytek důkazu upravte prvek $x \wedge (b \vee y)$ dvěma způsoby.

....

c) Nechť v $\mathcal{L}$ jsou pro všechna $a \in L$ množiny $\{x \in L \mid x \leq a\}$ bez nekonečných řetězců. Ukažte, že libovolné $a \in L$ má konečnou bázi.

Důkaz:

....

d) Jak je tomu s jednoznačností bází pro prvky svazů M_3 a N_5 ?

....

e) Nechť $\mathcal{L}$ je distributivní a nechť jsou jeho množiny $\{x \in L \mid x \leq a\}$, $a \in L$, bez nekonečných řetězců. Ukažte, že libovolné $a \in L$ má nejvýše jednu bázi.

Důkaz: Nechť S, T jsou báze prvku $a \in L$. Podle ... jsou množiny S, T konečné. Uvažujte $t \wedge \sup S$ pro $t \in T$ a $s \wedge \sup T$ pro $s \in S$.

....

Algebra II, 1. termín, úloha C, 3.6. 2010

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech grupoidů $(S, \cdot)$, v nichž existuje neutrální prvek, uvažovaná v jazyku jediného binárního operačního symbolu, uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť Σ je konečná množina a $(\Sigma^*, \cdot)$ je monoid všech slov nad Σ s operací zřetězení. Nechť ρ je relace na množině Σ^* definovaná vztahem

$$u \; \rho \; v \quad \text{právě když} \quad (\; \forall\, a \in \Sigma \;) \; (\; u \in \Sigma^* a \Sigma^* \iff v \in \Sigma^* a \Sigma^* \;) \; .$$

Je relace ρ kongruencí monoidu $(\Sigma^*, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{Z}$ uvažujeme unární operaci f danou předpisem $f(x) = x+1$. Rozhodněte, zda jsou unární algebry $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, f)$ a $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 16. 6. 2010

Jméno : **UČO :**

Identity ve faktor-algebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk **asociativního** binárního operačního symbolu $\circ$ a v něm pologrupu $\mathcal{S} = (S, \cdot)$.

a) n-ární termy lze psát ve tvaru $t = x_{i_1} \circ \cdots \circ x_{i_k}$, kde

....

b) Napište formulku pro realizaci $t^{\mathcal{S},n}$ termu t na pologrupě $\mathcal{S}$ a (indukcí) ji dokažte.

c) Nechť $u = x_{j_1} \circ \cdots \circ x_{j_l}$ je další n-ární term. Pologrupa $\mathcal{S}$ *splňuje* identitu $t = u$, jestliže

....

d) Nechť ρ je kongruencí pologrupy $\mathcal{S}$. Víme, že zobrazení $\rho^\sharp : S \to S/\rho,\ a \mapsto$ ..... je .... pologrupy $\mathcal{S}$ na ....

e) Doplňte a dokažte: Nechť pologrupa $\mathcal{S}$ splňuje identitu $t = u$. Pak

....

f) Nechť A a B jsou alespoň dvouprvkové množiny. Na A respektive B definujeme operace $*$ resp. $\star$ vztahy

$$a * b = a,\ c \star d = d,\ a, b \in A,\ c, d \in B\,.$$

Charakterizujte identity platné v $(A, *) \times (B, \star)$.

Algebra II, 2. termín, úloha B, 16. 6. 2010

Jméno : **UČO :**

Spojově a průsekově ireducibilní prvky.

Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz. Nechť $\mathsf{J}(\mathcal{L})$ (respektive $\mathsf{M}(\mathcal{L})$) značí mmožinu všech spojově (resp. průsekově) ireducibilních prvků s eventuelní výjimkou nejmenšího (resp. největšího) prvku. Nechť pro $x \in L$ je $\uparrow x = \{y \in L \mid x \leq y\}$ a $\downarrow x = \{y \in L \mid y \leq x\}$.

a) Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je distributivní svaz, nechť $x \neq 0$ (pokud 0 existuje). Dokažte ekvivalenci následujících podmínek:

(i) $x \in \mathsf{J}(\mathcal{L})$,

(ii) pro libovolná $a, b \in L$, nerovnost $x \leq a \vee b$ implikuje (buď $x \leq a$ nebo $x \leq b$),

(iii) pro libovolná $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in L$, nerovnost $x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_k$ implikuje existenci $i \in \{1, \ldots, k\}$ takového, že $x \leq a_i$.

Nechť v dalším je $\mathcal{L}$ konečný distributivní svaz.

b) Ukažte, že pro $x \in \mathsf{J}(\mathcal{L})$ existuje prvek $\overline{x} \in L$ takový, že $\downarrow \overline{x} = L \setminus \uparrow x$.

c) Ukažte, že $\overline{x}$ z bodu b) patří do množiny $\mathsf{M}(\mathcal{L})$.

d) Ukažte, že

$$\varphi : \mathsf{J}(\mathcal{L}) \to \mathsf{M}(\mathcal{L}),\ x \mapsto \overline{x}$$

je izomorfismem uspořádané množiny $(\mathsf{J}(\mathcal{L}), \leq)$ na uspořádanou množinu $(\mathsf{M}(\mathcal{L}), \leq)$. (Možný návod: najděte inverzní zobrazení.)

e) Ve svazu z tabule vyznačte množiny $\mathsf{J}(\mathcal{L})$, $\mathsf{M}(\mathcal{L})$ a zobrazení φ.

Algebra II, 2. termín, úloha C, 16. 6. 2010

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech unárních algeber (A, f), kde $f \circ f = f$, uvažovaná v jazyku jediného unárního operačního symbolu uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Na množině $\mathbb{Z}$ uvažujeme binární operaci sčítání a unární operaci f danou předpisem $f(x) = x^2$. Dále je ρ relace na množině $\mathbb{Z}$ definovaná vztahem

$$\text{pro } a, b \in \mathbb{Z} \text{ máme} \qquad a \rho b \quad \Longleftrightarrow \quad 7 \mid (a - b) \ .$$

Je tato relace ρ kongruencí algebry $(\mathbb{Z}, +, f)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{Q}$ uvažujeme unární operaci f danou předpisem $f(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda jsou unární algebry $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, f)$ a $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha A, 29. 6. 2010

Jméno : **UČO :**

Identity v podalgebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk **asociativního** binárního operačního symbolu $\circ$ a unárního operačního symbolu e pro **neutrální prvek** a v něm monoid $\mathcal{M} = (M, \cdot, 1)$.

a) n-ární termy lze psát ve tvaru $t = x_{i_1} \circ \cdots \circ x_{i_k}$, kde

....

b) Napište formulku pro realizaci $t^{\mathcal{M},n}$ termu t na monoidu $\mathcal{M}$ a (indukcí) ji dokažte.

c) Nechť $u = x_{j_1} \circ \cdots \circ x_{j_l}$ je další n-ární term. Monoid $\mathcal{M}$ *splňuje* identitu $t = u$, jestliže

....

d) Nechť monoid $\mathcal{N} = (N, \circ_{\mathcal{N}}, e_{\mathcal{N}})$ je podmonoidem monoidu $\mathcal{M}$. Pak zobrazení $\iota : N \to M,\ a \mapsto$ ..... je .... monoidu $\mathcal{N}$ do ....

e) Doplňte a dokažte: Nechť monoid .... splňuje identitu $t = u$. Pak též

....

f) Nechť A a B jsou alespoň dvouprvkové množiny. Na A, respektive, B definujeme operace $*$ resp. $\star$ vztahy

$$a * b = a,\ \ c \star d = d,\ \ a, b \in A,\ c, d \in B\,.$$

K pologrupě $(A, *) \times (B, \star)$ přidáme neutrální prvek 1. Které z následujících identit jsou ve vzniklém monoidu splněny ?

$$xyzx = xzyx,\ \ xyxy = xy,\ \ xyx = yxy,\ \ xyxzx = xyzx\ .$$

Algebra II, 3. termín, úloha B, 29. 6. 2010

Jméno : **UČO :**

Uspořádané množiny izotonních zobrazení.

Nechť pro uspořádané množiny $(P, \leq)$ a $(Q, \leq)$ je $(Q, \leq)^{(P,\leq)}$ množinou všech izotonních zobrazení $(P, \leq)$ do $(Q, \leq)$. Tato množina je uspořádaná "po složkách", tj. $\alpha \leq \beta$ právě když pro každé $a \in P$ máme $\alpha(a) \leq \beta(a)$.

$\mathsf{H}(P, \leq)$ značí množinu všech dědičných podmnožin uspořádané množiny $(P, \leq)$. Pro $n \in \mathbb{N}$ je $\mathbf{n}$ množina $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ s přirozeným uspořádáním.

a) Nechť $(P, \leq)$ je uspořádaná množina. Dokažte, že $(\mathsf{H}(P, \leq), \subseteq)$ je izomorfní s $(\mathbf{2}^{(P,\leq)}, \geq)$.

b) Nechť $(P, \leq)$, $(Q, \leq)$ a $(R, \leq)$ jsou uspořádané množiny. Dokažte, že platí

$$(((R, \leq)^{(Q,\leq)}, \leq)^{(P,\leq)}, \leq) \quad \text{je izomorfní s} \quad ((R, \leq)^{(P,\leq)\times(Q,\leq)}, \leq)\,.$$

c) Nechť $(P, \leq)$ je uspořádaná množina. Dokažte, že

$$(\mathbf{2}^{(P,\leq)}, \leq) \quad \text{je izomorfní s} \quad (\mathbf{2}^{(P,\geq)}, \geq)\,.$$

d) Nechť $(P, \leq)$ a $(Q, \leq)$ jsou uspořádané množiny. Dokažte, že

$$((\mathsf{H}(Q, \leq), \subseteq)^{(P,\leq)}, \leq) \quad \text{je izomorfní s} \quad (\mathsf{H}((P, \geq) \times (Q, \leq)), \subseteq)\,.$$

e) Nechť $(P, \leq)$ je uspořádaná množina a nechť $(L, \leq)$ je svaz. Dokažte, že $((L, \leq)^{(P,\leq)}, \leq)$ je podsvazem svazu $\prod_{p \in P} (L, \leq)$.

f) Uveďte diagramy uspořádaných množin $(\mathbf{2}^{\mathbf{4}}, \leq)$ a $(\mathbf{4}^{\mathbf{2}}, \leq)$.

Algebra II, 2. termín, úloha C, 29. 6. 2010

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech unárních algeber (A, f), kde $f : A \to A$ je bijekce, která je sama k sobě inverzní, uvažovaná v jazyku jediného unárního operačního symbolu uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť S je alespoň dvouprvková množina a operace $\cdot$ a $\circ$ na této množině jsou dány takto: pro libovolná $a, b \in S$ platí $a \cdot b = a$, $a \circ b = b$. Rozhodněte, zda jsou grupoidy $(S, \cdot)$ a $(S, \circ)$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Předně si uvědomme, že každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačným způsobem zapsat ve tvaru $2^{x-1}(2y-1)$, kde $x, y \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda zobrazení $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definované předpisem $\alpha(2^{x-1}(2y-1)) = (x, y)$ je homomorfismus grupoidu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +)$ do grupoidu $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.