Algebra II, 1. termín, úloha 1, 2.6. 2011

Jméno:

Identity v podalgebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk unárních operačních symbolů $f_1, \ldots, f_m$, m přirozené číslo, a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, g_1, \ldots, g_m)$ a $\mathcal{B} = (B, h_1, \ldots, h_m)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka.

....

b) Termy lze zavést i bez použití induktivní definice - jak ?

....

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

....

d) Algebra $\mathcal{B}$ je podalgebrou algebry $\mathcal{A}$, platí-li

....

e) Je-li navíc $t \in T_n$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, máme $t^{\mathcal{B},n}(b_1, \ldots, b_n) =$ ....

f) Dokažte tvrzení z e).

....

....

g) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$. Pak též

....

h) Dokažte tvrzení z g).

....

....

i) Identity v našem jazyce jsou dvou typů. Popište je.

....

....

j) Nechť $m = 2$, $A = \mathbb{Z}_k$, $g_1(a) = a + 1 \pmod{k}$, $g_2(a) = a - 2 \pmod{k}$. Které identity v naší algebře platí ?

....

....

Algebra II, 1. termín, úloha 2, 2.6. 2011

Jméno:

Uzávěrový operátor na množině A je zobrazení $C : 2^A \to 2^A$, které pro libovolná $X, Y \subseteq A$ splňuje
(i) $X \subseteq C(X)$,
(ii) $C(C(X)) \subseteq C(X)$,
(iii) $X \subseteq Y$ implikuje $C(X) \subseteq C(Y)$.

$X \subseteq A$ je C-*uzavřená* (stručně uzavřená), je-li $C(X) = X$. Množinu všech uzavřených množin značíme L_C a klademe $\mathcal{L}_C = (L_C, \subseteq)$. Doplňte a dokažte:

Věta 1. Nechť C je uzávěrový operátor na množině A. Pak $\mathcal{L}_C$ je úplný svaz a pro $Y \subseteq 2^A$

je $\sup Y =$ ...., $\inf Y =$ ....

Důkaz. ..... je nej...................... prvek.

Nechť X_i je uzavřená pro $i \in I$, $I \neq \emptyset$. Pak $C($.................$)$ .... $C($.......$)$ pro každé $i \in I$,

....

a tedy .... je uzavřená. Proto supréma jsou .... a infima jsou ....

Dokažte:

Věta 2. Nechť $\mathcal{L} = (L, \leq)$ je úplný svaz. Pak existuje vhodná množina A a uzávěrový operátor C na této množině tak, že $\mathcal{L}$ je izomorfní s $\mathcal{L}_C$.

Důkaz. Položíme $A = L$ a $C(X) = \{ a \in L \mid a \leq$ ....$\}$.
Postupně ověříme axiomy (i) – (iii):
(i):

(ii):

(iii):

Nechť $\alpha : L \to L_C,\ a \mapsto \{ b \in L \mid b \leq$ .... $\}$.
$\alpha(a)$ je uzavřená: ....
α je surjektivní: ....
Zřejmě: $a \leq b$ právě když .... a tedy α je hledaný izomorfismus.

Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz. Prvek $a \in L$ je *kompaktní*, existuje-li pro libovolné $A \subseteq L$ vlastnosti $a \leq \sup A$ takové konečné $B \subseteq A$, že $a \leq \sup B$. Svaz $\mathcal{L}$ je *kompaktně generovaný*, je-li libovolné $a \in L$ supremem vhodné množiny kompaktních prvků. Konečně svaz $\mathcal{L}$ je *algebraický*, je-li úplný a kompaktně generovaný.
Uzávěrový operátor C na množině A je *algebraický*, platí-li
(iv) pro libovolné $X \subseteq A$ máme $C(X) = \bigcup \{ C(Y) \mid Y \subseteq X,\ Y \text{ konečná} \}$.

Dokažte:

Věta 3. Nechť C je algebraický uzávěrový operátor na množině A. Pak $\mathcal{L}_C$ je algebraický svaz a jeho kompaktní prvky jsou právě $C(X)$ pro konečné množiny X.

Důkaz. a) Nejprve dokážeme, že pro konečnou X je $C(X)$ kompaktní v $\mathcal{L}_C$. Nechť tedy $X = \{a_1, \dots, a_m\}$, $C(X) \subseteq \sup\{\, C(A_i) \mid i \in I\,\} = C(\bigcup\{\, A_i \mid i \in I\,\})$.

Podle (iv) pro každé a_j existuje konečné $X_j \subseteq$ .... tak, že $a_j \in$ ....

X_j je konečná a proto $X_j \subseteq A_{j,1} \cup \cdots \cup A_{j,l_j}$, kde každé $A_{j,k}$ je některé A_i.

Pak $a_j \in$ ....,

$X \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq m}$ ....

$\subseteq C($..$)$.

Proto i $C(X) \subseteq$ ....

$= \sup\{\, C(A_{j,k}) \mid$ ....$\}$

a tedy $C(X)$ je ....

b) Podle (iv) je $C(X)$ supremem nějaké množiny ....

c) Zbývá ukázat, že ....

Algebra II, 1. termín, úloha 3, 2.6. 2011

Jméno:

---

a) Na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ uvažujme ternární operaci f definovanou předpisem

$$f(a,b,c) = \max(\min(a,b),c).$$

Rozhodněte, zda relace definovaná na $\mathbb{N}$ předpisem

$$a \sim b \iff 2 \nmid \frac{a \cdot b}{(\mathrm{nsd}(a,b))^2}$$

je kongruencí algebry $(\mathbb{N}, f)$.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Na množině $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ uvažujme unární operace f a g definované předpisy

$$f((a,b)) = (b,a) \qquad \text{a} \qquad g((a,b)) = (-a,b).$$

Rozhodněte, zda jsou algebry (A,f) a (A,g) izomorfní.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto algebry liší: 6 bodů.)

c) Rozhodněte, zda třída všech monounárních algeber, které splňují pro některé $n \geq 1$ identitu $f^n(x) = x$, je varieta.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha 1, 13.6. 2011

Jméno:

Identity ve faktorových algebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk unárních operačních symbolů $f_1, \ldots, f_k$ a nulárních operačních symbolů $c_1, \ldots, c_l$, k, l přirozená čísla, a v něm algebru $\mathcal{A} = (A, g_1, \ldots, g_k, d_1, \ldots, d_l)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka.

....

....

b) Termy lze zavést i bez použití induktivní definice - jak ?

....

....

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

....

....

d) ρ je kongruencí algebry $\mathcal{A}$, platí-li

....

....

e) Definujeme $\mathcal{A}/\rho =$ .... ,

kde .... Je-li navíc

$t \in T_n$, ... $\in$ ....., máme $t^{\mathcal{A}/\rho,n}$(.......................) $=$ ....

f) Dokažte tvrzení z konce e).

....

....

....

....

g) Nechť $t, u \in T_n$. Pak $\mathcal{A} \models t \simeq u$, je-li ....

h) Nechť $t, u \in T_n$, $\mathcal{A} \models t \simeq u$. Pak též $\mathcal{A}/\rho$ ....

i) Dokažte tvrzení z h).

....

....

j) Identity v našem jazyce jsou pěti typů. Popište je.

1) .... 2) ....

3) .... 4) ....

5) ....

k) Dáno $m \in \mathbb{N}$. Nechť $k = 1$, $l = m$, $A = \mathbb{Z}_m$, $g_1(a) = a + 1 \pmod m$, $d_j = [j]_m$, $j = 1, \dots, m$. Které identity jednotlivých typů v naší algebře platí ?

1) ....

2) ....

3) ....

4) ....

5) ....

Algebra II, 2. termín, úloha 2, 13.6. 2011

Jméno:

Svazy kongruencí. Je dána monounární algebra $\mathcal{A} = (A, f)$. Nechť $\mathsf{Con}\,\mathcal{A}$ značí množinu všech jejích kongruencí. Nechť pro relace ρ, σ na množině A je

$$\rho \circ \sigma = \{\, (a, c) \in A \times A \mid \text{ existuje } b \in A \text{ splňující } a\ \rho\ b\ \sigma\ c \,\}\ .$$

Relace ρ, σ jsou *záměnné*, je-li $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.

a) Dokažte, že $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \subseteq)$ je úplný svaz.

b) Pro $\rho, \sigma \in \mathsf{Con}\,\mathcal{A}$ máme

$\rho \wedge \sigma =$ ....

$\rho \vee \sigma =$ ....

c) Pro záměnné kongruence ρ, σ máme $\rho \vee \sigma =$ ....

d) Dokažte : Nechť algebra $\mathcal{A}$ má libovolné dvě kongruence záměnné. Pak je svaz $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \wedge, \vee)$ modulární.

Skutečně, nechť $\rho, \sigma, \tau \in \mathsf{Con}\,\mathcal{A}$, ρ ....

Máme ukázat, že $\rho \vee (\sigma \wedge \tau)$ ....

Nechť tedy $(a, b) \in$ ....Existuje $c \in A$ tak, že ....

Hledáme $d \in A$ tak, aby ....

Stačí vzít ....

neboť .... , ... a .... plyne z .... , ...

e) Nechť $A = \{a, b, p, q\}$, $f(a) = b, f(b) = a, f(p) = q, f(q) = p$. Popište $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \subseteq)$.

f) Tento svaz je/není (zakroužkujte správnou odpověď) modulární a proto (vyberte)
- i) existuje dvojice kongruencí, které nejsou záměnné
- ii) ze znalosti svazu na izomorfismus nelze nic usoudit o záměnnosti kongruencí.

g) V případě i) takovou dvojici ρ, σ najděte a uveďte, jak vypadají $\rho \circ \sigma$ a $\sigma \circ \rho$ (například namalujte relace jako orientované grafy).

V případě ii) dejte příklad algebry $\mathcal{B}$, která má svaz kongruencí $(\mathsf{Con}\,\mathcal{B}, \subseteq)$ izomorfní s $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \subseteq)$, přičemž ....

Algebra II, 2. termín, úloha 3, 13.6. 2011

Jméno:

---

a) Na množině

$$A = \{ (a,b,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \geq b \geq c \}$$

definujme binární operaci f předpisem

$$f((a,b,c),(d,e,f)) = (\max(a,d), \min(b,e), c).$$

Rozhodněte, zda relace $\sim$ definovaná na A předpisem

$$(a,b,c) \sim (d,e,f) \iff (a \geq e \ \& \ d \geq b)$$

je kongruencí algebry (A, f).

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť L je množina všech relací ekvivalence na množině $\mathbb{N}$ a nechť K je podmnožina L obsahující právě relace ρ, které splňují implikaci

$$(1,2) \notin \rho \implies (3,4) \notin \rho.$$

Rozhodněte, zda je K podalgebrou svazu $(L, \vee, \wedge)$, kde $\vee$ a $\wedge$ jsou obvyklé operace odpovídající uspořádání $\subseteq$.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Nechť $A = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Na množině $A \times A$ definujme unární operace f a g předpisy

$$f((a,b)) = (\min(a,b), \min(a,b)) \qquad \text{a} \qquad g((a,b)) = (\max(a,b), \max(a,b)).$$

Rozhodněte, zda jsou algebry $(A \times A, f)$ a $(A \times A, g)$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, uvedení izomorfismu/uvedení vlastnosti zachovávané izomorfismy, v níž se tyto algebry liší: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy 3, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha 1, 29.6. 2011

Jméno:

Identity v součinech

Uvažujme jazyk jediného unárního operačního symbolu f. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Definujte množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka.

....

....

....

c) Definujte realizaci $t^{\mathcal{B},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{B} = (B, h)$.

....

....

c) Připomeňte definici součinu systému množin $(A_i)_{i\in I}$. (I je libovolná množina !)

....

d) Algebra $\mathcal{A} = (A, g)$ je *součinem* systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, g_i))_{i\in I}$, jestliže

....

....

e) Pro $t \in T_n$ a $(a_i^1)_{i\in I}, \ldots, (a_i^n)_{i\in I} \in A$ máme $t^{\mathcal{A},n}((a_i^1)_{i\in I}, \ldots, (a_i^n)_{i\in I}) =$

.... $t^{\mathcal{A}_i,n}$(...) ....

....

f) Dokažte tvrzení z e).

....

....

....

....

g) Nechť $\mathcal{C} = (C, k)$. Popište všechny vztahy, které obecně platí mezi $\mathsf{Id}(\mathcal{B} \times \mathcal{C})$, $\mathsf{Id}(\mathcal{B})$ a $\mathsf{Id}(\mathcal{C})$.

....

h) Dokažte tvrzení z g).

i) Identity v našem jazyce jsou dvou typů. Popište je.

j) Nechť $B = \{a, b\}$, $h(a) = b$, $h(b) = a$, $C = \{p, q, r\}$, $k(p) = q$, $k(q) = r$, $k(r) = r$. Uveďte diagram algebry $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

k) Charakterizujte identity platné v $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

Algebra II, 3. termín, úloha 2, 29.6. 2011

Jméno:

Doplnění uspořádání do lineárního.

a) V důkazu věty budeme potřebovat tzv. Zornovo lemma. Doplňte: Nechť $(M, \leq)$ je uspořádaná množina, v níž má libovolná lineárně uspořádaná podmnožina horní závoru. Pak pro libovolné $a \in M$ existuje $b \in M$ takové, že ....

b) Pro uspořádanou množinu $(\{a, b, c, d\}, \leq)$, kde v $<$ jsou právě $(a, b), (d, b), (d, c)$, najděte všechna lineární uspořádání na $\{a, b, c, d\}$ mající $\leq$ za podmnožinu.

Pro další úvahy fixujme libovolnou uspořádanou množinu $(A, \leq)$.
c) Nechť $a, b \in A$ jsou nesrovnatelná v relaci $\leq$. Položme

$$\leq' = \{ (x, y) \in A \times A \mid x \leq a,\ b \leq y \},\ \leq'' = \leq \cup \leq' \ .$$

Dokažte, že relace $\leq''$ je uspořádáním na množině A.
Skutečně, reflexivita $\leq''$ plyne z ....

tranzitivita:
pro $x \leq y \leq z$ máme $x \leq z$ z tranzitivity relace $\leq$,

pro $x \leq y \leq' z$ ....

pro $x \leq' y \leq z$ ....

pro $x \leq' y \leq' z$ ....

antisymetrie:
pro $x \leq y \leq x$ ....

pro $x \leq y \leq' x$ ....

pro $x \leq' y \leq x$ ....

pro $x \leq' y \leq' x$ ....

Nechť v dalším je O množinou všech uspořádání na množině A.
d) Maximální prvky uspořádané množiny $(O, \subseteq)$ jsou právě ....
Důkaz: $\Rightarrow$:

$\Leftarrow$:

e) Dokažte větu: Na množině A existuje lineární uspořádání obsahující relaci $\leq$.
Důkaz:
Nechť $\{ \leq_i \mid i \in I \}$, $I \neq \emptyset$, je lineárně uspořádaná podmnožina v $(O, \subseteq)$. ....
....
....

Algebra II, 3. termín, úloha 3, 29. 6. 2011

Jméno:

---

a) Na množině $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujme unární operaci f předpisem

$$f((a,b)) = (a-b, b-a)$$

a binární operaci g předpisem

$$g((a,b),(c,d)) = (a + \max(c,d), b + \max(c,d)).$$

Na množině $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definujme unární operaci p předpisem

$$p((a,b,c)) = (a-b, b-a, |a-b|)$$

a binární operaci q předpisem

$$q((a,b,c),(d,e,f)) = (a + \max(d,e), b + \max(d,e), c+f).$$

Je zobrazení $\varphi\colon A \to B$ definované předpisem

$$\varphi((a,b)) = (a, b, \max(a,b))$$

homomorfismus algebry (A, f, g) do algebry (B, p, q)?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť L je množina všech relací ekvivalence na množině $\mathbb{N}$. Na L definujeme relaci $\sim$ předpisem

$$\rho \sim \sigma \iff \text{množiny } \mathbb{N}/\rho \text{ a } \mathbb{N}/\sigma \text{ mají stejnou mohutnost.}$$

Rozhodněte, zda je $\sim$ kongruencí svazu $(L, \vee, \wedge)$, kde $\vee$ a $\wedge$ jsou obvyklé operace odpovídající uspořádání $\subseteq$.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Rozhodněte, zda třída všech monoidů, které splňují pro některé $n \geq 2$ identitu $x_1 \cdots x_n = x_n \cdots x_1$, je varieta.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)