Democvičení

MB101 - jaro 2012

14. března 2012

Příklad 1. Zvolme náhodně dvě čísla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Určete pravděpodobnost, že bude

1. součet jejich druhých mocnin menší než 1
2. jejich součet větší než 1 a zároveň součet jejich druhých mocnin menší než 1
3. součet jejich druhých mocnin menší než 1 a zároveň součet druhých mocnin jejich dvojnásobků větší než 1.

Příklad 2. Je dán obdélník o rozměrech $a\sqrt{3}$ a a, kde $a \in \mathbb{R}^+$. Určete pravděpodobnost, že nám přímka kolmá k úhlopříčce (a s úhlopříčkou různoběžná) rozdělí tento obdélník na dva lichoběžníky.

Příklad 3. Nádrž má obdélníkový půdorys, východní a západní stěna mají hranu délky 40 m, jižní a severní pak 100 m. V nádrži plave labuť. Jaká je pravděpodobnost, že je k jižní stěně blíž než ke zbývajícím třem?

Příklad 4. Na množině $\mathbb{N}$ definujme relaci ρ vztahem

$$a \;\rho\; b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : a = b \cdot c.$$

Rozhodněte, zda je relace ρ reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, úplná a zobrazení.

Příklad 5. Je dána relace ρ mezi množinami $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit, \bigstar\}$:

$$\rho = \{(1, \spadesuit), (2, \bigstar), (3, \heartsuit), (4, \diamondsuit), (5, \clubsuit), (1, \spadesuit)\}.$$

1. Dokažte, že je relace ρ zobrazení, resp. bijektivní zobrazení
2. Určete $\rho \circ \rho^{-1}$, $\rho^{-1} \circ \rho$

Příklad 6. Uvažme množinu $M = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ všech reálných funkcí. Na množině M definujme relaci σ vztahem

1. $f \;\sigma\; g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$
2. $f \;\sigma\; g \Leftrightarrow f(1) \cdot g(1) = 0$

Rozhodněte, zda je relace ρ reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní, úplná.

Příklad 7. Na množině $M = \{a, b, c, d\}$ je definována relace σ

$$\sigma = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b)\}$$

Dokažte, že je tato relace relací ekvivalence a určete rozklad příslušný ekvivalenci σ.

Příklad 8. Určete všechny rozklady množiny $\{a, b, c\}$ a určete příslušné ekvivalence.

Příklad 9. Na množině $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ definujme relaci σ

$$a \ \sigma \ b \Leftrightarrow \text{čísla } a, b \text{ mají stejný ciferný součet.}$$

Dokažte, že je tato relace relací ekvivalence a popište příslušný rozklad.

Příklad 10. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ dané vztahem $f((a, b)) = \{a, b\}$, injektivní, surjektivní a bijektivní.

Příklad 11. Rozhodněte, zda je zobrazení $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané vztahem $f((a, b)) = 2^{x-1}(2y - 1)$, injektivní, surjektivní a bijektivní.

Příklad 12. Je dána množina $M = \{a, b, c\}$. Uveďte příklad relace na množině M, která bude

1. ekvivalence i uspořádání
2. ekvivalence i zobrazení
3. reflexivní i tranzitivní, ale není uspořádání