Matematika 1 **A**
27. května 2009 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
0							

Potřebné minimum (**včetně bodů ze semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

---

1. (6 bodů) Rozhodněte, je-li matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diagonalizovatelná, určete regulární matici P a diagonální D takové, že $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ a prostřednictvím diagonalizace vypočtete A^5 a A^{-3} .

2. (6 bodů) Určete všechny dvojice parametrů, pro něž je množina řešení soustavy

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ x + ay + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= b \end{aligned}$$

s neznámými $x, y, z \in \mathbb{R}$

(a) nekonečná,

(b) prázdná.

3. (5 bodů) Mějme vektory

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, -2, 2, 0), \quad u_2 = (-1, 1, 0, 0) \\ u_3 &= (1, -2, 2, 3), \quad u_4 = (2, -5, t, 3). \end{aligned}$$

(a) Určete, pro které hodnoty $t \in \mathbb{R}$ je u_4 lineární kombinací u_1, u_2, u_3,

(b) pomocí Gram-Schmidtova procesu určete ortogonální bázi $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$,

(c) určete souřadnice u_4 (pro hodnotu t určenou v (a)) v bázi určené v (b).

4. (4 body) Určete obecnou rovnici roviny určené body $A = [-1, 1, 0], B = [2, 1, 6], C = [3, 0, 4]$.

5. (6 bodů) V každém pytli s 1000 zlaťáky jsou 4 falešné, pokud je pytel z Kutné Hory, a 2 falešné, pokud je z Prahy. Máme 20 pytlů z Kutné Hory a 30 pytlů z Prahy. Náhodně vybereme pytel a z něho zlaťák. Určete pravděpodobnost, že:

(a) zlaťák je falešný,

(b) pokud je vytažen pravý zlaťák, tak je z Prahy.

6. (3 body) Definujte pojem tranzitivní relace a pojem relace ekvivalence. Udejte příklad relace na tříprvkové množiněm, která je reflexivní a tranzitivní, ale není symetrická.

Matematika 1 **B**
27. května 2009 (UČO:)

Hodnocení:

Semestr (max. 15b.)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
0							

Potřebné minimum (**včetně bodů ze semestru**) je **20 bodů**.
Na práci máte cca 100 minut.

---

1. (5 bodů) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete algebraickou a geometrickou násobnost všech vlastních hodnot a uveďte, je-li matice M diagonalizovatelná.

2. (6 bodů) V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost roviny $\alpha : [1, 2, 0, -1] + s(1, 0, 3, 0) + t(2, 0, 1, 0)$ od přímky $p : [4, 3, 4, 6] + r(3, 4, 4, 3)$ a body, v nichž se tato vzdálenost realizuje (tj. nejkratší úsečku s jedním koncovým vrcholem v α a druhým na p).

3. (6 bodů) U zkoušky je 70% studentů, kteří se učili, zbytek se neučil (šli to *zkusit*). Student, který se poctivě učil, zkoušku úspěšně absolvuje s pravděpodobností 90%, student, který se neučil, s pravděpodobností 20%. Určete pravděpodobnosti následujících jevů:

(a) náhodně vybraný student zkoušku udělá;
(b) student, který zkoušku udělal, se na to ani nepodíval;
(c) student, který zkoušku neudělal, se poctivě připravoval.

4. (5 bodů) Pomocí výpočtu vhodného determinantu rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů z $\mathbb{R}^4$ ($a \in \mathbb{R}$ je parametr):

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (a, 0, a, 0)$$
$$u_3 = (a, 2, 3, 4), \quad u_4 = (1, -1, 0, 0).$$

5. (5 bodů) Uvažujte množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ a relaci ρ mezi těmito množinami danou předpisem

$$\rho = \{[1, d], [2, a], [2, b], [3, c]\}.$$

(a) Určete, je-li relace ρ zobrazení a pokud ano, je-li toto zobrazení sujektivní a/nebo injektivní.
(b) Určete inverzní relaci ρ^{-1} a uveďte, jde-li o zobrazení a pokud ano, je-li toto zobrazení sujektivní a/nebo injektivní.
(c) Určete složené relace $\rho^{-1} \circ \rho$ a $\rho \circ \rho^{-1}$.

6. (3 body)

(a) Definujte pojem hodnost matice.
(b) Zformulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic.
(c) Uveďte souvislost mezi determinantem regulární matice A a matic A^{-1}, A^T.