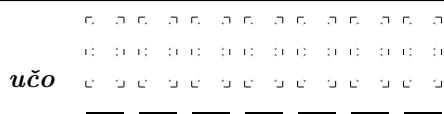


Jméno:

Místo:

1. vnitrosemestrální písemka



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dána n -prvková množina M . Určete počet všech symetrických relací na množině M , které nebudou reflexivní. Své tvrzení zdůvodněte.

Příklad 1 5 bodů

Označme tuto relaci $R \subseteq M \times M$. To, že relace není reflexivní, znamená, že $(a, a) \notin R$ pro nějaké $a \in M$. Symetričnost, znamená, že pokud je v relaci prvek a, b pro $a \neq b$, musí být v relaci nutně i prvek (b, a) , jinak nastává spor s vlastností symetrie.

Pro každou dvojici různých prvků a, b , musí být v R buď (a, b) i (b, a) , nebo ani jeden z nich. Máme tak pro každou dvojici různých prvků, kterých je $\frac{n(n-1)}{2}$, celkem 2 možnosti, proto je celkový počet různých relací splňující vlastnost ze zadání

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (2^n - 1).$$

Na množině \mathbb{Z} je dána relace σ vztahem:

Příklad 2 10 bodů

$$(a, b) \in \sigma \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = b + 3c.$$

Rozhodněte, zda je relace σ reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní a úplná. Své tvrzení zdůvodněte.

1. Reflexivní: ano

$$a = a + 3 \cdot 0$$

2. Symetrická: ano

$$(a, b) \in \sigma \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = b + 3c \Rightarrow b = a + 3(-c) \Rightarrow (b, a) \in \sigma$$

3. Antisymetrická: ne

$$(1, 4) \in \sigma \wedge (4, 1) \in \sigma \text{ ale } 1 \neq 4$$

4. Tranzitivní: ano

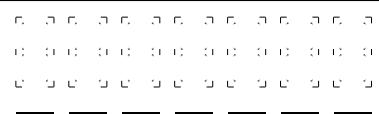
$$\begin{aligned} (a, b) \in \sigma \wedge (b, c) \in \sigma &\Rightarrow \\ \exists d, e \in \mathbb{Z} : a = b + 3d, b = c + 3e &\Rightarrow \\ a = c + 3(e + d) &\Rightarrow \\ (a, c) \in \sigma \end{aligned}$$

5. Úplná: ne, ani $(1, 2)$, ani $(2, 1)$ nejsou v σ

Jméno:

Místo:

1. vnitrosemestrální písemka



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jsou dána zobrazení $f, g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vztahem

Příklad 3
15 bodů

$$f((x, y)) = (x + y, 2y + 1), \quad g((x, y)) = (x^2 + y, x), \text{ pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní, surjektivní, bijektivní. Své tvrzení zdůvodněte.

b) Určete předpis zobrazení $f \circ g$.

a) Snadno rozepsáním dostaneme, že zobrazení je injektivní, stačí srovnat druhé složky a dosadit do složek prvních. Zobrazení však není surjektivní, protože například $(0, 0)$ nemá svůj vzor.

b)

$$\begin{aligned} g \circ f((x, y)) &= g(f((x, y))) = g((x + y, 2y + 1)) = ((x + y)^2 + (2y + 1), x + y) = \\ &= (x^2 + 2xy + y^2 + 2y + 1, x + y) \end{aligned}$$

Jméno:

Místo:

1. vnitrosemestrální písemka



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Střelec opakovně střílí do terče. Pravděpodobnost, že zasáhne, je při každém výstřelu 0,3. Kolikrát nejméně musí vystřelit, abychom s pravděpodobností alespoň 0,95 mohli říci, že se trefí alespoň jednou. Své tvrzení zdůvodněte.

Příklad 4 10 bodů

Jev „trefí alespoň jednou“ označme A , je jevem opačným k jevu „netrefí ani jednou“. Pravděpodobnost, že se netrefí ani jedním z n pokusů je $0,7^n$. Proto

$$P(A) = 1 - 0,7^n$$

Chceme, aby tato pravděpodobnost byla vyšší než 0,95. Stačí vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} 1 - 0,7^n &\geq 0,95 \\ 0,05 &\geq 0,7^n \\ \ln(0,05) &\geq n \cdot \ln(0,95) \\ n &\geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)} \\ n &\geq 8,399\dots \end{aligned}$$

Jelikož má být výsledek zjevně přirozené číslo, je dostatečný počet výstřelů roven 9.

Jméno:

Místo:

1. vnitrosemestrální písemka



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Určete všechna komplexní čísla z , která splňují rovnost

$$\bar{z} \cdot (z - 1) = |z|^2.$$

Příklad 5 10 bodů

Komplexní číslo z dosadíme ve tvaru $z = a + bi$

$$(a - bi)(a + bi - 1) = |a + bi|^2$$

$$a^2 + b^2 - a + bi = a^2 + b^2$$

Porovnáme reálné a komplexní části a dostaváme dvě rovnice:

$$b = 0$$

$$a^2 + b^2 - a = a^2 + b^2$$

Z obou rovnic je hned vidět, že jediné řešení je $b = 0$ a $a = 0$, tudíž hledané $z = 0$.

Jiné řešení: nic nedosazujeme, roznásobíme rovnici a dosadíme známý fakt, že $|z|^2 = z\bar{z}$

$$\bar{z}z - \bar{z} = \bar{z}z$$

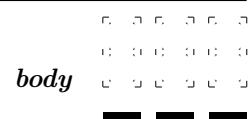
$$\bar{z} = 0$$

tudíž i $z = 0$.

Jméno:

Místo:

1. vnitrosemestrální písemka



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9