Jméno: **Místnost:** **2. vnitrosemestrální písemka**

2222 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 1
10 bodů

Nechť je dán vektorový prostor $\mathbb{R}^5$. Označme

$$M = \{(a, b, 0, d, e) \in \mathbb{R}^5 \mid a + e = b + d\}.$$

1. Dokažte, že M tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^5$.
2. Určete dimenzi a nějakou bázi M.

Je potřeba ukázat, že pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a libovolné $u, v \in M$, $u = (a, b, 0, d, e)$, $v = (a', b', 0, d', e')$ je i $\alpha u + \beta v \in M$

$$\alpha(a, b, 0, d, e) + \beta(a', b', 0, d', e') = (\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', 0, \alpha d + \beta d', \alpha e + \beta e')$$

Nyní je potřeba ověřit, zda tento prvek leží v M. Na třetím místě je určitě 0 a

$$(\alpha a + \beta a') + (\alpha e + \beta e') = \alpha(a + e) + \beta(a' + e').$$

Protože $u, v \in M$ platí $a + e = b + d$, $a' + e' = b' + d'$,

$$\alpha(a + e) + \beta(a' + e') = \alpha(b + d) + \beta(b' + d') = (\alpha b + \beta b') + (\alpha d + \beta d')$$

Tudíž i $\alpha u + \beta v \in M$ a M tvoří podprostor $\mathbb{R}^5$. Dimenze tohoto prostoru je o dva menší než dimenze $\mathbb{R}^5$, tj. 3, jeho báze je např.

$$(1, 0, 0, 0, -1)$$
$$(0, 1, 0, -1, 0)$$
$$(0, 0, 0, 1, 1)$$

Jméno: **Místnost:** **2. vnitrosemestrální písemka**

list 2 učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 2
10 bodů

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány podprostory

$$U = \langle (1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0)\rangle,\ V = \langle (0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\rangle$$

1. Určete bázi a dimenzi $U+V$. Své tvrzení zdůvodněte.
2. Určete dimenzi $U\cap V$ a rozhodněte, zda je součet $U+V$ přímý. Své tvrzení zdůvodněte.

Z generátorů je zřejmé, že dimenze obou prostorů je 3, protože

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Nejdříve zjistíme dimenzi $U+V$. Generující vektory zapíšeme do sloupců matice, kterou upravíme do schodovitého tvaru a určíme její hodnost

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&1&0\\1&0&0&1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&1&-1&-1&-1\\0&1&1&0&-1&-1\\0&1&0&0&0&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&-1&-1&0\\0&0&1&0&-1&0\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

Matice má hodnost 4, což je i dimenze prostoru $U+V$. Jako bázi můžeme vzít např. vektory, které odpovídají sloupcům obsahujícím vedoucí prvky, tj. vektory

$$(1,1,1,1),\ (1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (0,1,1,1)$$

Ze vztahu

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U\cap V)$$

je zřejmé, že dimenze průniku prostorů U a V je $3+3-4=2$, tj. součet není přímý. (přímý $\Leftrightarrow$ dimenze průniku je 0)

Příklad 3
5 bodů

Vyjádřete vektor x^3-6x^2-2x+9 jako lineární kombinaci vektorů x^3+2x^2+1, $-x^3+2x^2+x-2$, $4x^2+x+2$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Nejjednodušší je přepsat vektory do souřadnic v bázi $(x^3,x^2,x,1)$, takže se snažíme dostat vektor $u=(1,-6,-2,9)$ vyjádřit jako součet vektorů $v_1=(1,2,0,1)$, $v_2=(-1,2,1,-2)$ a $v_3=(0,4,1,2)$. Řešíme tedy soustavu čtyř rovnic $av_1+bv_2+cv_3=u$ pro neznámé a,b,c.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\2&2&4&-6\\0&1&1&-2\\1&-2&2&9\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&4&4&-8\\0&1&1&-2\\1&-1&2&8\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&1&1&-2\\1&0&3&6\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Řešení je tedy

$$c = 2$$
$$b = -4$$
$$a = -3$$

Jméno: **Místnost:** **2. vnitrosemestrální písemka**

2222 *list* 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Příklad 4
15 bodů

V závislosti na reálném parametru t řešte soustavu rovnic nad reálnými čísly zadanou rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (t-1)^2 & t-1 \end{array}\right).$$

Upravíme matici do schodovitého tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (t-1)^2 & t-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t^2-2t & t-2 \end{array}\right)$$

tedy

$$(t^2-2t)z = t(t-2)z = t-2$$

Můžou nastat tři možnosti

1. $t = 2$, obě strany rovnice jsou rovny 0 a rovnice má řešení pro lib. z
2. $t \neq 0, t \neq 2$ a rovnice má řešení $z = \frac{1}{t}$
3. $t = 0$ a rovnice nemá řešení

Z druhé rovnice dostáváme pro

1. $t = 2$

$$\begin{aligned} 2y + z &= 1 \\ y &= \frac{1-z}{2} \end{aligned}$$

2. $t \neq 0, t \neq 2$

$$\begin{aligned} ty + \frac{1}{t} &= 1 \\ y &= \frac{t-1}{t^2}. \end{aligned}$$

Konečně z první rovnice dostáváme pro

1. $t = 2$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + \frac{1-z}{2} + z &= 1 \\ x &= \frac{1-z}{2} \end{aligned}$$

2. $t \neq 0, t \neq 2$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + \frac{t-1}{t^2} + \frac{1}{t} &= 1 \\ x &= \frac{(t-1)^2}{t^2} \end{aligned}$$

Celkem máme tři možnosti v závislosti na parametru t:

1. $t = 2$, rovnice má řešení $(\frac{1-z}{2}, \frac{1-z}{2}, z)$ dimenze 1 s parametrem z,
2. $t \neq 0, t \neq 2$ a rovnice má právě jedno řešení $(\frac{(t-1)^2}{t^2}, \frac{t-1}{t^2}, \frac{1}{t})$,
3. $t = 0$ a systém rovnic nemá řešení.

Jméno: **Místnost:** **2. vnitrosemestrální písemka**

2222 *list* 4 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

Podrobně vypočtěte determinant matice A

Příklad 5
10 bodů

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$$