

Konvergence

Kriteria:

1) Nulná podmínka: $\sum a_n$ konverg. $\Rightarrow \lim a_n = 0$

2) $a_n \leq b_n$ srovnání

a) $\sum b_n$ konverg. $\Rightarrow \sum a_n$ konverg.

b) $\sum a_n$ diverg. $\Rightarrow \sum b_n$ diverg.

3) LIMITNÍ SROVNÁVACÍ KRITÉRIUM

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = L \in [0, \infty]$$

a) $\sum b_n$ konverg. a $L < \infty \Rightarrow \sum a_n$ konverg.

b) $\sum b_n$ diverg. a $L > 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverg.

4) INTEGRÁLNÍ KRITÉRIUM

$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ kladná a klesající

$a_n > 0, f(n) = a_n. \sum a_n$ konv. $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ konv.

5) PODÍLOVÉ (D'ALEMBERTOVO) KRITÉRIUM

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} L < 1 & \text{konverg.} \\ L = 1 & \text{nelze rozhod.} \\ L > 1 & \text{diverg.} \end{cases}$$

6) ODMOCNINOVÉ (CAUCHYHOVO) KRITÉRIUM

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L \begin{cases} L < 1 & \text{konverg.} \\ L = 1 & \text{nelze rozhod.} \\ L > 1 & \text{diverg.} \end{cases}$$

7) RAABEHO KRITÉRIUM

$$\lim n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L \begin{cases} L > 1 & \text{konverg.} \\ L = 1 & \text{nelze rozhod.} \\ L < 1 & \text{diverg.} \end{cases}$$

ABSOLUTNÍ a NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE

1) LEIBNIZOVO KRITERIUM

$$\text{Nezáp. } \sum_{n>0} a_n (-1)^{n-1} \text{ konv.} \Leftrightarrow \lim a_n = 0.$$

2) SROVNÁVACÍ KRITERIUM

$$\sum b_n \text{ konv. } |a_n| \leq b_n \Rightarrow a_n \text{ abs. konv.}$$

3) ODMOCNINOVÉ KRITERIUM

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \text{ konv. abs.} \\ \geq 1 \text{ diverguje}$$

4) PODÍLOVÉ KRITERIUM

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \begin{cases} > 1 \text{ div.} \\ < 1 \text{ konv.} \end{cases}$$

5) A+D: $\{b_n\}$ monotonní

1) D: $\sum a_n$ abs. a $\lim b_n = 0$

2) A: $\sum a_n < \infty$ b_n abs.

$$\Rightarrow \sum a_n b_n \text{ konv.}$$

Dirichlet: $\sum a_n b_n = ?$

$$\{b_n\} \dots \text{ monotonní, } b_n \rightarrow 0 \text{ a } \sum a_n \text{ ohraničena} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum a_n b_n \text{ konvergentní}$$

Abel: $\{b_n\}$ monotonní + ohraničena a $\sum a_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum a_n b_n \text{ konvergentní}$$