Úkol 4 a 5 20. 3. 2012

Přibližné vyjádření funkce

1) Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu

a) $\cos 61^\circ$ $[\cos 61^\circ \doteq 0.4849]$

b) $\mathrm{e}^{1.2}$ $[\mathrm{e}^{1.2} \doteq \mathrm{e} \cdot 1.2 \doteq 3.2619]$

c) $\sin 31^\circ$ $[\sin 31^\circ \doteq 0.5302]$

d) $\sqrt{85}$ $[\frac{83}{9} = 9.\bar{2}]$

2) Nalezněte Taylorův polynom $n-$tého stupně se středem v bodě x_0 následujících funkcí

a) $f(x) = \cos 2x,\ x_0 = \frac{\pi}{4},\ n = 3$ $[T_3(x) = -2x + \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3]$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2},\ x_0 = 0,\ n = 2$ $[T_2(x) = 1 - x^2]$

c) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1,\ n = 3$ $[T_3(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3]$

Průběh funkce

3) Vyšetřete průběh funkcí

a) $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$

b) $f(x) = x - \arctan x$

c) $f(x) = \frac{x^3-1}{(x-1)^3}$

d) $f(x) = \ln(4 - x^2)$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$

Slovní úlohy

I Zahřívá-li se kovový kotouč (např. v troubě), jeho poloměr roste tempem $0.01\,\mathrm{cm/min}$. Jakou rychlostí roste jeho obsah, když je jeho poloměr $50\,\mathrm{cm}$? [$\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$]

II Fotbalový míč je nafukován rychlostí $\pi\,\mathrm{ft}^3/\mathrm{min}$. Jak rychle se zvětšuje jeho poloměr ve chvíli, kdy je jeho poloměr roven $0.1\,\mathrm{ft}$? Jak rychle roste jeho povrch? [$25\,\mathrm{ft/min}$; $20\pi\,\mathrm{ft}^2/\mathrm{min}$]

III Objem krychle roste tempem $1200\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{min}$. Jakou rychlostí roste délka hrany krychle ve chvíli, kdy dosahuje $10\,\mathrm{cm}$? [$4\,\mathrm{cm/min}$]

IV Analogové hodiny ukazují čas 12:20. Jak rychle se v tomto okamžiku mění vzdálenost konce minutové ručičky od horního okraje ciferníku (značka 12 hodin), je-li poloměr hodin 12 cm? Předpokládáme, že tvar ciferníku je ideálního kruh a konec minutové ručičky se dotýká jeho okraje. [$12\pi\,\mathrm{cm/hod}$]

V Do autobusu se vejde 60 lidí. Vztah mezi počtem lidí jedoucích autobusem x a cenou lístku v dolarech je popsatelný rovnicí $p(x) = [3 - (\frac{x}{40})]^2$. Napište vztah mezi celkovým příjmem společnosti provozující autobusovou dopravu $r(x)$ za jednu cestu. Jaký počet cestujících zajistí $\frac{dr}{dx} = 0$? Jaké bude příslušné jízdné? [40 cestujících; 4 dolary]

VI Uvažujme že veškerý ekonomický výstup ekonomiky se v čase t dá popsat rovnicí $Y(t) = L(t) \cdot V(t)$, kde $L(t)$ je velikost pracovní síly (zjednodušeně počet pracujících) a $V(t)$ je velikost výstupu na pracovníka. Dále nechť pracovní síla roste každoročně tempem $5\,\%$, tj. $\frac{dL}{dt} = 0.05L(t)$ a průměrný produkt tempem $4\,\%$, tj. $\frac{dV}{dt} = 0.04V(t)$. Odvoďte vztah pro růst celkového produktu $Y(t)$, tj. $\frac{dY}{dt}$. Jakožto druhý příklad uvažujte klesající velikost pracovní síly, ročně o $2\,\%$ a rostoucí produktivitu ročně o $3\,\%$. Jak se v tomto případě vyvíjí produkt? Roste/klesá?

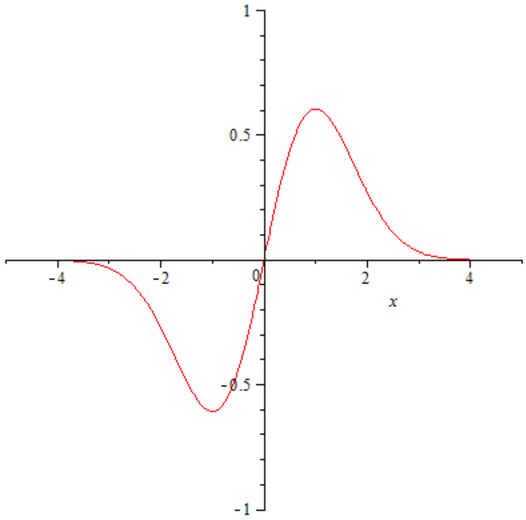
[$\frac{dY}{dt} = 0.09L(t) \cdot V(t) = 0.09Y(t)$; poroste tempem $1\,\%$ ročně]

VII O dům je opřený žebřík dlouhý 13 ft. Jestliže jeho základna podklouzne, žebřík začne sjíždět k zemi (stále zůstává opřený o dům). Jestliže je základna žebříku 12 ft od domu, klouže od něj rychlostí 5 ft/s. Jak rychle v tomto okamžiku

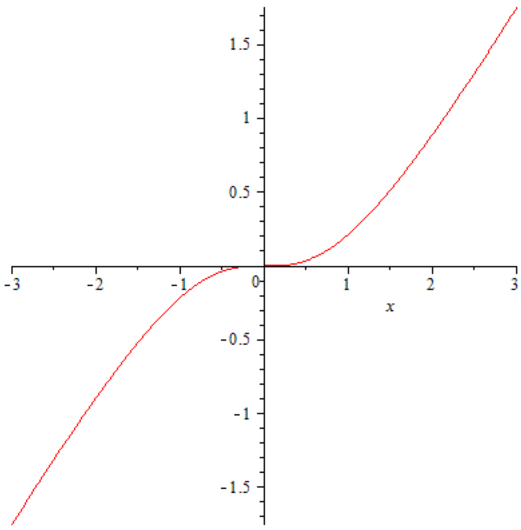
a. klesá vršek žebříku po zdi,
b. se mění obsah trojúhelníka vymezeného žebříkem, domem a zemí,
c. se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?

[12 ft/s; -59.5 ft^2/s; -1 rad/s]

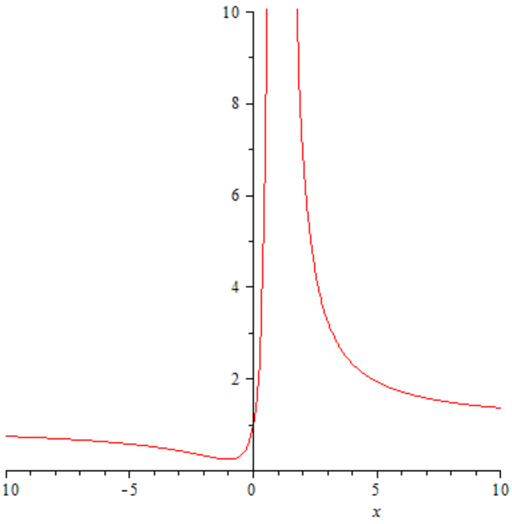
Grafy funkcí z Průběhu funkce



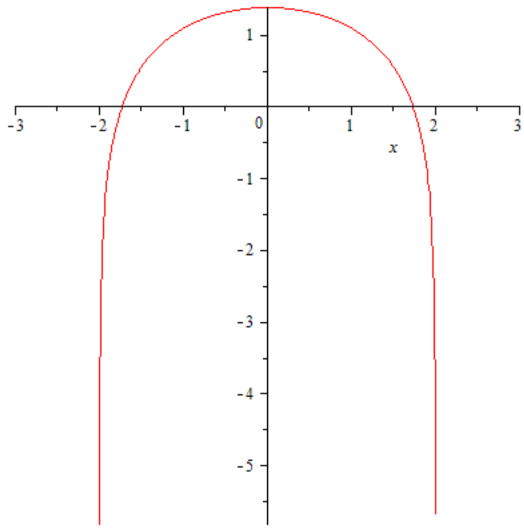
a)



b)

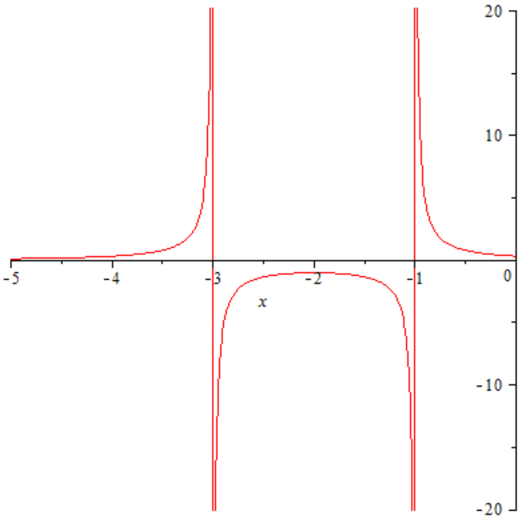


c)



d)

e)



Pro další příklady mohu opět doporučit odkaz: Sbírka úloh - sekce 4, případně pro průběh funkce tento odkaz.