$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

CVIČENÍ 8

$\int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx$

1) $\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$

2) $\int_0^1 x(x^2-1)^3 dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dt = x\,dx \\ 1:\ t = 1^2-1 \\ \quad t=0 \\ 0:\ t = 0^2-1 \\ \quad t=-1 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 t^3 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^0 =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{0^4}{4} - \frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{8}}}$

3) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

4) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty$

5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 =$

$= -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - 1 - 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = -(-\infty) - 2 + \infty = \underline{\underline{\infty}}$

NIKOLI: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1-1 = -2 < 0$, a to je nesmysl, když $\frac{1}{x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

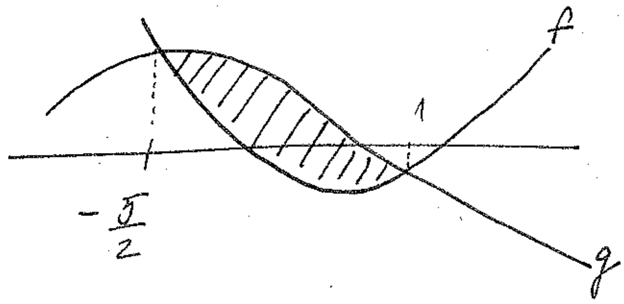
6) Vypočtěte obsah plochy ohraničené f-cemi

$g(x) = -x^2 - 2x + 2 \qquad f(x) = x^2 + x - 3$

$x^2 + x - 3 = -x^2 - 2x + 2$

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2(-5)}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{5}{2} \end{array}\right.$



$$* = 2\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 2\cdot\left[\sqrt{1-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} - 0 + 0 - 0\right] =$$

$$= 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} = 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}}}$$

Střední hodnota: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Plocha mezi grafy: $f(x) \geq g(x)$ na $\langle a, b\rangle$ $P = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$

Délka křivky: $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Objem rotačního tělesa: $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

Obsah pláště rotačního tělesa: $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

NEKONEČNÉ ŘADY

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

Součet řady: $s = \lim_{n \to \infty} s_n$, kde $\{s_n\}$ je p-st n-tých částečných součtů

→ existuje konečná limita ⇒ řada konverguje k součtu s

→ existuje nevlastní limita } ⇒ řada diverguje nebo osciluje
→ neexistuje limita

Kritéria konvergence:

Nutná podm. $\sum a_n$ K $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

A) řady s nezápornými členy $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) srovnávací

$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$: → $\sum b_n$ konverguje → $\sum a_n$ také konverguje

→ $\sum a_n$ diverguje ⇒ $\sum b_n$ také diverguje

2) limitní

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$: → $L < \infty$, $\sum b_n$ konverguje ⇒ $\sum a_n$ také konverguje

→ $L > 0$, $\sum b_n$ diverguje ⇒ $\sum a_n$ také diverguje

3, podílové d'Alembertovo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q : \rightarrow q < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$\rightarrow q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

$\rightarrow q = 1 \Rightarrow$ nelze určit, musím použít jiné kritérium

4, odmocninové Cauchyho

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q : \rightarrow q < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje}$$

$\rightarrow q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverguje

$\rightarrow q = 1 \Rightarrow$ nelze určit, musím použít jiné kritérium

5, limitní Raabeovo:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = d : \rightarrow d < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje}$$

$d > 1 \Rightarrow \sum a_n$ konverguje

$d = 1 \Rightarrow$ nelze určit, musí použít jiné kritérium

6, integrální

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje (jeho hodnota je menší než ∞), kde f je spojitá, nezáporná klesající fce taková, že $f(n) = a_n \ \forall n \in N$.

3, alternující řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$; $a_n > 0$

1, Leibnitzovo

a_n je klesající p-st kladných čísel

$\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

C, řady s libovolnými členy

1, absolutní konvergence

pokud $\sum |a_n|$ konverguje, pak $\sum a_n$ konverguje absolutně

$\sum a_n$ konverguje absolutně $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje

$\sum a_n$ konverguje a $\sum |a_n|$ diverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje neabsolutně

L) řada je ve tvaru $\sum a_n \cdot b_n$

- Abelovo: $\sum a_n$ konverguje, posl. b_n je ohraničená $\Rightarrow \sum a_n b_n$ konverguje
- Dirichlet: $\sum a_n$ má posl. n-tých částečných součtů $\{s_n\}$ ohraničenou a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \sum a_n \cdot b_n$ konverguje

Operace s řadami:

- $\sum a_n + \sum b_n = \sum (a_n + b_n)$, pokud jsou obě řady konvergentní
- $(a_1 + a_2) + a_3 + \dots = a_1 + (a_2 + a_3) + \dots$, pokud je řada konvergentní
- $k(\sum a_n) = \sum k a_n$, pokud je řada konvergentní
- $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = a_3 + a_2 + a_1 + \dots$, pokud je řada absolutně konvergentní