Dodatek ke třetímu cvičení

Derivace polynomu $f = (x-a)^n \cdot p$ je $f' = n(x-a)^{n-1} \cdot p + (x-a)^n \cdot p'$ (jedná se o derivaci součinu).

Při hledání násobných kořenů polynomu $h = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 12x^2 - 8\sqrt{2}x + 4$, jsme došli k tomu, že je $h = h' \cdot (x - \sqrt{2})$. Otázka je jaké kořeny má polynom třetího stupně h'. Uvažme, že by měl tři různé kořeny, které nejsou rovny $\sqrt{2}$. Pak by polynom h měl každý z těchto kořenů dvojnásobný a navíc by měl kořen $\sqrt{2}$. To by znamenalo, že je stupně 7, ale on je stupně 4, tedy takto to byt nemůže. Uvažme, že by polynom h' měl tři stejné kořeny kořeny, které nejsou rovny $\sqrt{2}$. Pak by polynom h měl tentýž kořen čtyřnásobný a navíc by měl kořen $\sqrt{2}$. To by znamenalo, že je stupně 5, ale on je stupně 4, tedy takto to také být nemůže. Jediná možnost, která je možná pro kořeny h', je že má trojnásobný kořen $\sqrt{2}$, tj. $h = (x - \sqrt{2})^4$.

Příklad: Ukažte, že polynom $x^3 + 1$ nemá násobné kořeny.

Příklad: Najděte všechny ireducibilní polynomy stupně 4 nad $\mathbf{Z}_3$.