Drsná matematika IV – 1. přednáška
Grupy permutací a symetrie rovinných obrazců

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

20. 2. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného přednášejícího, GOOGLE, atd.

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- bude doplněno kapitoly nové učebnice ...

Podmínky pro absolvování předmětu

Podmínky byly již sděleny mailem prostřednictvím ISu

Plán přednášky

Chceme abstraktně pracovat s objekty a se situacemi, ve kterých je možné rovnice

$$a \cdot x = b$$

vždy jednoznačně řešit (tak jako u lineárních rovnic jsou objekty a a b jsou dány, zatímco x hledáme).
Jde o tzv. **teorii grup**. Všimněme si, že zatím nic nevíme o povaze objektů, ani co znamená ta „tečka“ v rovnici.

Chceme abstraktně pracovat s objekty a se situacemi, ve kterých je možné rovnice

$$a \cdot x = b$$

vždy jednoznačně řešit (tak jako u lineárních rovnic jsou objekty a a b jsou dány, zatímco x hledáme).
Jde o tzv. **teorii grup**. Všimněme si, že zatím nic nevíme o povaze objektů, ani co znamená ta „tečka“ v rovnici.
Nejprve projdeme příklady, ve kterých se s takovými objekty potkáváme, poté si zavedeme malý slovníček pojmů.

Example

1. Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, spolu s kteroukoliv z operací sčítání a násobení jsou asociativní a komutativní pologrupa s jednotkou, neexistují v ní ale inverzní prvky.

Example

1. Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, spolu s kteroukoliv z operací sčítání a násobení jsou asociativní a komutativní pologrupa s jednotkou, neexistují v ní ale inverzní prvky.
2. Celá čísla $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ jsou grupoid vůči kterékoliv z operací sčítání, odčítání, násobení. Jsou dokonce komutativní grupou vzhledem ke sčítání, jsou však jen komutativní pologrupou vůči násobení (neexistují inverze k prvkům $a \neq \pm 1$). Operace odčítání není ani asociativní (např. $(5-3)-2 = 0 \neq 5-(3-2) = 4$). Všimněte si také, že pro odečítání je nula pravý neutrální prvek, ne však levý. Dokonce v tomto případě levý neutrální prvek neexistuje.

Example

1. Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, spolu s kteroukoliv z operací sčítání a násobení jsou asociativní a komutativní pologrupa s jednotkou, neexistují v ní ale inverzní prvky.
2. Celá čísla $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ jsou grupoid vůči kterékoliv z operací sčítání, odčítání, násobení. Jsou dokonce komutativní grupou vzhledem ke sčítání, jsou však jen komutativní pologrupou vůči násobení (neexistují inverze k prvkům $a \neq \pm 1$). Operace odčítání není ani asociativní (např. $(5-3)-2 = 0 \neq 5-(3-2) = 4$). Všimněte si také, že pro odečítání je nula pravý neutrální prvek, ne však levý. Dokonce v tomto případě levý neutrální prvek neexistuje.
3. Racionální čísla $\mathbb{Q}$ jsou komutativní grupou vzhledem ke sčítání a nenulová racionální čísla jsou grupou vůči násobení. Celá čísla spolu se sčítáním jsou jejich podgrupou.

Example (pokračování)

1. Pro $k \in \mathbb{N}$, množina všech k-tých odmocnin z jedničky, tj. množina $\{z \in \mathbb{C};\ z^k = 1\}$ je konečná grupa vůči násobení komplexních čísel. Např. pro $k = 2$ dostaneme grupu $\{-1, 1\}$ se dvěma prvky, které jsou oba samy sobě inverzí, zatímco pro $k = 4$ dostáváme grupu $G = \{1, i, -1, -i\}$.

Example (pokračování)

1. Pro $k \in \mathbb{N}$, množina všech k-tých odmocnin z jedničky, tj. množina $\{z \in \mathbb{C};\ z^k = 1\}$ je konečná grupa vůči násobení komplexních čísel. Např. pro $k = 2$ dostaneme grupu $\{-1, 1\}$ se dvěma prvky, které jsou oba samy sobě inverzí, zatímco pro $k = 4$ dostáváme grupu $G = \{1, i, -1, -i\}$.
2. Množina Mat_n všech čtvercových matic je (nekomutativní) pologrupa vzhledem k násobení matic a komutativní grupa vzhledem ke sčítání matic.

Example (pokračování)

1. Pro $k \in \mathbb{N}$, množina všech k-tých odmocnin z jedničky, tj. množina $\{z \in \mathbb{C};\ z^k = 1\}$ je konečná grupa vůči násobení komplexních čísel. Např. pro $k = 2$ dostaneme grupu $\{-1, 1\}$ se dvěma prvky, které jsou oba samy sobě inverzí, zatímco pro $k = 4$ dostáváme grupu $G = \{1, i, -1, -i\}$.
2. Množina Mat_n všech čtvercových matic je (nekomutativní) pologrupa vzhledem k násobení matic a komutativní grupa vzhledem ke sčítání matic.
3. Množina všech lineárních zobrazení $\mathrm{Hom}(V, V)$ na vektorovém prostoru je pologrupa vzhledem ke skládání zobrazení a komutativní grupa vzhledem ke sčítání zobrazení.

Example (pokračování)

1. Pro $k \in \mathbb{N}$, množina všech k-tých odmocnin z jedničky, tj. množina $\{z \in \mathbb{C};\ z^k = 1\}$ je konečná grupa vůči násobení komplexních čísel. Např. pro $k = 2$ dostaneme grupu $\{-1, 1\}$ se dvěma prvky, které jsou oba samy sobě inverzí, zatímco pro $k = 4$ dostáváme grupu $G = \{1, i, -1, -i\}$.
2. Množina Mat_n všech čtvercových matic je (nekomutativní) pologrupa vzhledem k násobení matic a komutativní grupa vzhledem ke sčítání matic.
3. Množina všech lineárních zobrazení $\mathrm{Hom}(V, V)$ na vektorovém prostoru je pologrupa vzhledem ke skládání zobrazení a komutativní grupa vzhledem ke sčítání zobrazení.
4. V obou předchozích příkladech, podmnožina invertibilních objektů uvažované pologrupy tvoří grupu. V případě matic jde o tzv. grupu invertibilních matic, ve druhém o grupu lineárních transformací vektorového prostoru (tj. invertibilních lineárních zobrazení).

Definition

Pro libovolnou množinu A:

- **binární operace** na A je zobrazení $A \times A \to A$, které budeme zpravidla značit $(a, b) \mapsto a \cdot b$, množina s binární operací je **grupoid**
- binární operace je **asociativní**, jestliže pro všechny prvky v A platí $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- binární operace je **komutativní**, jestliže pro všechny prvky v A platí $a \cdot b = b \cdot a$
- **levá jednotka** v A je takový prvek $e \in A$, že pro všechny prvky v A platí $e \cdot a = a$; obdobně pro **pravou jednotku** musí platit pro všechny prvky $a \cdot e = a$
- **jednotka** binární operace je prvek e, který je pravou i levou jednotkou zároveň
- **pologrupa** $(A, \cdot)$ je grupoid s binární operací, která je asociativní.

Definition (pokračování)

- prvek a^{-1} je **levou inverzí** k prvku a v pologrupě $(A, \cdot)$ s jednotkou e, jestliže platí $a^{-1} \cdot a = e$; obdobně je **pravou inverzí** a^{-1} takový prvek, pro který je $a \cdot a^{-1} = e$
- prvek a^{-1} je **inverzní** k a v pologrupě s jednotkou, jestliže je levou i pravou inverzí zároveň
- **grupa** $(G, \cdot)$ je pologrupa s jednotkou, ve které má každý prvek inverzi
- **komutativní grupa**, resp. **komutativní pologrupa**, je taková, kde je operace $\cdot$ komutativní.
- Je-li $(A, \cdot)$ grupa (případně pologrupa), pak její podmnožinu $B \subset A$, která je uzavřená vůči zúžení operace $\cdot$ a zároveň je spolu s touto operací grupou, nazýváme **podgrupa** v $(A, \cdot)$.

Plán přednášky

Zpravidla grupy a pologrupy potkáváme jako množiny zobrazení na pevně dané množině M, které jsou uzavřeny vůči skládání zobrazení. Často si ale tuto skutečnost přímo neuvědomujeme.
Na každé konečné množině M, s $m = |M| \in \mathbb{N}$ prvky máme k dispozici m^m možných definic zobrazení (každý z m prvků můžeme zobrazit na kterýkoliv v M) a všechna taková zobrazení umíme skládat.

Zpravidla grupy a pologrupy potkáváme jako množiny zobrazení na pevně dané množině M, které jsou uzavřeny vůči skládání zobrazení. Často si ale tuto skutečnost přímo neuvědomujeme. Na každé konečné množině M, s $m = |M| \in \mathbb{N}$ prvky máme k dispozici m^m možných definic zobrazení (každý z m prvků můžeme zobrazit na kterýkoliv v M) a všechna taková zobrazení umíme skládat.

Pokud chceme, aby existovala k zobrazení $\alpha : M \to M$ jeho inverze α^{-1}, musí být α bijekcí. Složením dvou bijekcí vznikne opět bijekce a proto podmnožina Σ_m všech bijekcí na množině M o m prvcích je grupa. Říkáme jí **grupa permutací** na m prvcích.

Název **grupa permutací** přitom uvádí jinou souvislost, kdy místo bijekcí na konečné množině vnímáme permutace jako přerovnání rozlišitelných prvků. Potkávali jsme se s ní např. při studiu determinantů.

Název **grupa permutací** přitom uvádí jinou souvislost, kdy místo bijekcí na konečné množině vnímáme permutace jako přerovnání rozlišitelných prvků. Potkávali jsme se s ní např. při studiu determinantů.

V grupě permutací Σ_3 na číslech $\{1, 2, 3\}$ si třeba označíme jednotlivá pořadí

$$a = (1, 2, 3),\ \ b = (2, 3, 1),\ \ c = (3, 1, 2),$$
$$d = (1, 3, 2),\ \ e = (3, 2, 1),\ \ f = (2, 1, 3).$$

Skládání našich permutací je pak zadáno tabulkou

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	f	d	e
c	c	a	b	e	f	d
d	d	e	f	a	b	c
e	e	f	d	c	a	b
f	f	d	e	b	c	a

Všimněme si podstatného rozdílu mezi permutacemi a, b a c a dalšími třemi. Ty první tři tvoří tzv. **cyklus** generovaný prvkem b nebo prvkem c:

$$b^2 = c,\ b^3 = a,\ c^2 = b,\ c^3 = a$$

a samy o sobě jsou tyto tři prvky komutativní podgrupou. V ní a je jednotka, a b s c jsou vzájemně inverzní. Je tedy tato podgrupa stejná jako je grupa $\mathbb{Z}_3$ zbytkových tříd celých čísel modulo 3, resp. jako grupa třetích odmocnin z jedničky z jednoho z předchozích příkladů.

Všimněme si podstatného rozdílu mezi permutacemi a, b a c a dalšími třemi. Ty první tři tvoří tzv. **cyklus** generovaný prvkem b nebo prvkem c:

$$b^2 = c,\ b^3 = a,\ c^2 = b,\ c^3 = a$$

a samy o sobě jsou tyto tři prvky komutativní podgrupou. V ní a je jednotka, a b s c jsou vzájemně inverzní. Je tedy tato podgrupa stejná jako je grupa $\mathbb{Z}_3$ zbytkových tříd celých čísel modulo 3, resp. jako grupa třetích odmocnin z jedničky z jednoho z předchozích příkladů.
Další tři prvky jsou samy sobě inverzí a každý z nich je tedy společně s jednotkou a podgrupou stejnou jako je $\mathbb{Z}_2$. Říkáme, že b a c jsou **prvky řádu** 3, zatímco prvky d, e a f jsou řádu 2.

Obdobně se chovají všechny grupy permutací Σ_m.
Každá permutace σ rozkládá množinu M na disjunktní sjednocení maximálních invariantních podmnožin M_x, které dostaneme tak, že postupně vybíráme dosud nezpracované prvky $x \in M$ a do třídy rozkladu M_x přidáváme všechny akce iterací $\sigma^k(x)$, $k = 1, 2, \ldots,$ dokud není $\sigma^k(x) = x$.

Obdobně se chovají všechny grupy permutací Σ_m.
Každá permutace σ rozkládá množinu M na disjunktní sjednocení maximálních invariantních podmnožin M_x, které dostaneme tak, že postupně vybíráme dosud nezpracované prvky $x \in M$ a do třídy rozkladu M_x přidáváme všechny akce iterací $\sigma^k(x)$, $k = 1, 2, \ldots,$ dokud není $\sigma^k(x) = x$.

Každou permutaci tak dostáváme jako složení jednodušších permutací, tzv. cyklů, které se chovají jako identická permutace vně M_x a tak jako σ na M_x.

Obdobně se chovají všechny grupy permutací Σ_m.
Každá permutace σ rozkládá množinu M na disjunktní sjednocení maximálních invariantních podmnožin M_x, které dostaneme tak, že postupně vybíráme dosud nezpracované prvky $x \in M$ a do třídy rozkladu M_x přidáváme všechny akce iterací $\sigma^k(x)$, $k = 1, 2, \dots,$ dokud není $\sigma^k(x) = x$.

Každou permutaci tak dostáváme jako složení jednodušších permutací, tzv. cyklů, které se chovají jako identická permutace vně M_x a tak jako σ na M_x.

Pokud přitom očíslujeme prvky v M_x jako pořadí $(1, 2, \dots, |M_x|)$ tak aby i odpovídalo $\sigma^i(x)$, pak je naše permutace prostým posunutím o jednu pozici v cyklu (tj. poslední prvek je zobrazen zpátky na první). Odtud název **cyklus**. Zjevně přitom tyto cykly komutují, takže je jedno, v jakém pořadí z nich permutaci σ složíme.

Nejjednodušší cykly jsou jednoprvkové pevné body permutace σ.
Dvouprvkové $(x, \sigma(x))$, kde $\sigma(\sigma(x)) = x$ se nazývají **transpozice**.

Nejjednodušší cykly jsou jednoprvkové pevné body permutace σ. Dvouprvkové $(x, \sigma(x))$, kde $\sigma(\sigma(x)) = x$ se nazývají **transpozice**.

Každý cyklus zjevně můžeme poskládat z permutací sousedních prvků (necháme „probublat“ první prvek nakonec) $\Rightarrow$ každou permutaci napsat jako složení transpozic sousedních prvků. Skutečnost, jestli potřebujeme sudý nebo lichý počet permutací je na našich volbách nezávislá.

Nejjednodušší cykly jsou jednoprvkové pevné body permutace σ. Dvouprvkové $(x, \sigma(x))$, kde $\sigma(\sigma(x)) = x$ se nazývají **transpozice**.

Každý cyklus zjevně můžeme poskládat z permutací sousedních prvků (necháme „probublat“ první prvek nakonec) $\Rightarrow$ každou permutaci napsat jako složení transpozic sousedních prvků. Skutečnost, jestli potřebujeme sudý nebo lichý počet permutací je na našich volbách nezávislá.

Máme proto definováno dobře zobrazení $\mathrm{sgn} : \Sigma_m \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$, tzv. **paritu** permutace. Dokázali jsme si znovu tvrzení, která jsme již využívali při studiu determinantů:

Theorem

Každá permutace konečné množiny je složením cyklů. Cyklus délky ℓ lze vyjádřit jako složení $\ell - 1$ transpozic. Parita cyklu délky ℓ je $(-1)^{\ell-1}$. Parita složení permutací je součinem parit jednotlivých z nich, tzn. že zobrazení sgn *převádí složení permutací $\sigma \circ \tau$ na součin $\operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau$ v komutativní grupě $\mathbb{Z}_2$.*

Plán přednášky

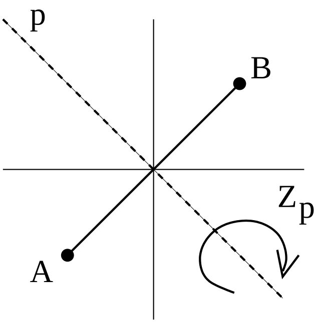
Každé zobrazení roviny do sebe, které zachovává vzdálenosti bodů je affinní, tj. je složením lineárního a vhodné translace (hezké cvičení na diferenciální počet – ale teď zjevně offtopic ;-). Lineární část takového zobrazení přitom musí navíc být ortogonální. Všechna taková zobrazení tedy tvoří grupu všech ortogonálních transformací (nebo také euklidovských transformací) v rovině (viz 4. přednáška 1. semestr).

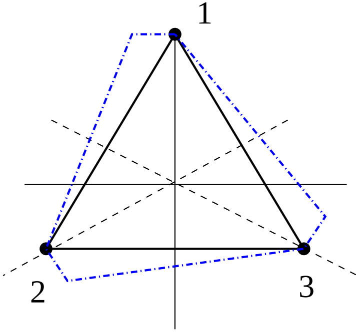
Každé zobrazení roviny do sebe, které zachovává vzdálenosti bodů je affinní, tj. je složením lineárního a vhodné translace (hezké cvičení na diferenciální počet – ale teď zjevně offtopic ;-). Lineární část takového zobrazení přitom musí navíc být ortogonální. Všechna taková zobrazení tedy tvoří grupu všech ortogonálních transformací (nebo také euklidovských transformací) v rovině (viz 4. přednáška 1. semestr).

Všechna taková jsou složením

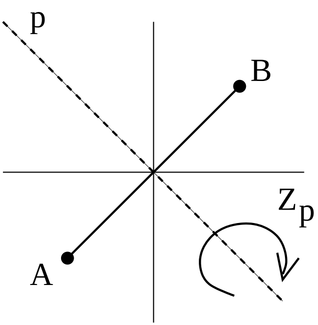
- translací T_a o vektor a
- rotací R_φ o jakýkoliv úhel φ kolem počátku
- zrcadlení Z_ℓ vůči jakékoliv přímce ℓ procházející počátkem.

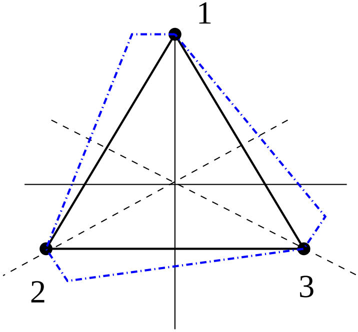
Uvažme ohraničený rovinný obrazec, pro začátek úsečku a rovnostranný trojúhelník. Ptáme se, **jak moc jsou symetrické?**





Uvažme ohraničený rovinný obrazec, pro začátek úsečku a rovnostranný trojúhelník. Ptáme se, **jak moc jsou symetrické?**





Tzn. vůči kterým trasformacím (zachovávajícím velikost) jsou invariantní? Všechny symetrie pevně zvoleného útvaru budou vždy tvořit grupu (většinou pouze s jediným prvkem, identickým zobrazením).

symetrie úsečky

U úsečky je situace obzvlášť jednoduchá – na první pohled je zřejmé, že jedinými jejími netriviálními symetriemi jsou rotace o π, zrcadlení vůči ose této úsečky a zrcadlení vůči úsečce samotné a všechny tyto symetrie jsou samy sobě inverzí. Celá grupa symetrií úsečky má tedy čtyři prvky. Její tabulka násobení vypadá takto:

$\cdot$	R_0	R_π	Z_H	Z_V
R_0	R_0	R_π	Z_H	Z_V
R_π	R_π	R_0	Z_V	Z_H
Z_H	Z_H	Z_V	R_0	R_π
Z_V	Z_V	Z_H	R_π	R_0

a je tedy celá tato grupa komutativní.

symetrie rovnostranného trojúhelníku

Symetrií nacházíme více: můžeme rotovat o $\pi/3$ nebo můžeme zrcadlit vůči osám stran.

symetrie rovnostranného trojúhelníku

Symetrií nacházíme více: můžeme rotovat o $\pi/3$ nebo můžeme zrcadlit vůči osám stran.

Abychom dostali grupu celou, musíme přidat všechna složení takovýchto transformací.
Víme, že složení dvou zrcadlení je vždy otočením (4. přednáška 1. semestru). Složení takových zrcadlení v opačném pořadí dá otočení o stejný úhel, ale s opačnou orientací. V našem případě tedy zrcadlení kolem dvou různých os vygenerují postupnou opakovanou aplikací všechny symetrie, který bude dohromady šest.

Jestliže si umístíme trojúhelník v souřadnicích jako na obrázku, bude našich šest transformací zadáno maticemi

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sestavením tabulky pro násobení, tak jak jsme ji udělali pro grupu permutací Σ_3 obdržíme právě stejný výsledek.

Dihedrální grupy

Obdobně umíme nacházet grupy symetrií s k různými rotacemi a k zrcadleními. Stačí si k tomu vzít pravidelný k-úhelník. Takové grupy symetrií se často označují jako grupy D_k a říká se jim **dihedrální grupy** řádu k.

Dihedrální grupy

Obdobně umíme nacházet grupy symetrií s k různými rotacemi a k zrcadleními. Stačí si k tomu vzít pravidelný k-úhelník. Takové grupy symetrií se často označují jako grupy D_k a říká se jim **dihedrální grupy** řádu k.

Tyto grupy jsou nekomutativní pro všechny $k \geq 3$, zatímco D_2 je komutativní. Název patrně je odvozen od skutečnosti, že D_2 je grupa symetrií molekuly vodíku.

cyklické grupy

Stejně tak lze snadno najít obrazce, které mají pouze rotační symetrie a jde tedy o komutativní grupy, které se v chemii značí jako C_k. Říkáme jim **cyklické grupy** řádu k. K tomu postačí např. uvažovat pravidelný mnohoúhelník, u kterého nesymetricky ale pořád stejně pozměníme chování hran, viz. čerchované rozšíření trojúhelníku na předchozím obrázku.
Všimněme si, že grupu C_2 lze realizovat dvěma způsoby – buď jedinou netriviální rotací o π nebo jediným zrcadlením.

Klasifikace symetrií

Theorem

Nechť je M ohraničená množina v rovině $\mathbb{R}^2$. Pak grupa jejich symetrií je buď triviální nebo jedna z grup C_k, D_k, s $k \geq 1$.

Plán přednášky

Složitější chování lze vypozorovat u rovinných obrazců v pásech nebo v celé rovině (něco jako možnosti symetrií pro různé dlažby).

Složitější chování lze vypozorovat u rovinných obrazců v pásech nebo v celé rovině (něco jako možnosti symetrií pro různé dlažby).

Uvažme množinu M, která je celá obsažena v pásu uzavřeném mezi dvěma rovnoběžkami. Pro symetrie takové množiny nepřicházejí v úvahu žádné netriviální rotace, kromě R_π, a jediná možná zrcadlení jsou buď podle osy pásu nebo nějaké na pás kolmé přímky.
K dispozici jsou ještě translace podle vektoru rovnoběžného s osou pásu. Všimněme si, že každá netriviální translace svými iteracemi zapříčiní, že celá grupa symetrií M bude již nutně nekonečná a dvě zrcadlení podle různých rovnoběžných přímek budou translací.

Docela jednoduchý je popis všech **diskrétních grup** symetrií pro rovinné pásy. Jsou to takové, kdy obraz libovolného bodu při působení všemi prvky grupy je diskrétní podmnožinou v rovině. Každá takové grupa je generována některými z následujících symetrií: translace T, posunutá reflexe G, vertikální reflexe V, horizontální reflexe H a rotace R o π.

Docela jednoduchý je popis všech **diskrétních grup** symetrií pro rovinné pásy. Jsou to takové, kdy obraz libovolného bodu při působení všemi prvky grupy je diskrétní podmnožinou v rovině. Každá takové grupa je generována některými z následujících symetrií: translace T, posunutá reflexe G, vertikální reflexe V, horizontální reflexe H a rotace R o π.

Theorem

Těchto grup je sedm typů. Jsou generovány

1. *jedinou translací T*
2. *jedinou posunutou translací G*
3. *jednou translací T a jedním vertikálním zrcadlením V*
4. *jednou translací T a jednou rotací R*
5. *jednou posunutou translací G a jednou rotací R*
6. *jednou translací T a horizontálním zrcadlením H*
7. *jednou translací T, horizontálním zrcadlením H a jedním vertikálním zrcadlením V*

Složitější je to se symetriemi obrazců, které vyplní celou rovinu.

Všech takových grup symetrií v rovině je pouze sedmnáct. Říká se jim dvourozměrné krystalografické grupy.