

PA081: Programování numerických výpočtů

4. Nelineární rovnice o jedné neznámé praktické příklady

Aleš Křenek

jaro 2012

K sestavení kluzného ložiska uložení ocelové mostní konstrukce je třeba na místě zasunout čep o vnějším průměru 313 mm do náboje o stejném vnitřním průměru.

Sestavení probíhá s podchlazeným čepem, díky tepelné roztažnosti materiálu je menší a ložisko lze sestavit. Bezpečné zmenšení průměru je 0.37 mm.

Na jakou teplotu je třeba čep podchládit, předpokládáme-li teplotu prostředí 20°C?

- ▶ koeficient tepelné roztažnosti oceli α závisí na teplotě
 - ▶ výpočet tedy není zcela triviální
- ▶ v rozmezí $\pm 200^\circ\text{C}$ je poměrně přesně vyjádřen funkcí

$$\alpha(T) = aT^2 + bT + C$$

kde $a = -8.27 \times 10^{-11}$, $b = 2.21 \times 10^{-8}$, $c = 1.17 \times 10^{-5}$

- ▶ koeficienty získány regresí (proložení křivky) experimentálních dat
- ▶ metodu regrese budeme probírat později

- ▶ poloměr po zchlazení počítáme pro $\Delta T \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}r_x &= r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0))(1 - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T)) \dots \\ &= r_0(1 - \Delta T \alpha(T_0) - \Delta T \alpha(T_0 - \Delta T) \\ &\quad + (\Delta T)^2 \alpha(T_0) \alpha(T_0 - \Delta T)) \dots\end{aligned}$$

- ▶ vedlo by na netriviální diferenciální rovnici
- ▶ protože $\alpha(T) \ll 1$, $\Delta T \ll 1$, lze nelineární členy zanedbat
- ▶ dostáváme zjednodušení

$$r_x = r_0(1 - \hat{\alpha}(T_x)) \quad \text{kde} \quad \hat{\alpha}(T_x) = \int_{T_x}^{T_0} \alpha(T) dT$$

a budeme řešit rovnici

$$\hat{\alpha}(T_x) = \frac{r_0 - r_x}{r_0}$$

- ▶ řešená funkce

$$\begin{aligned} f(T_x) &= \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[\frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT \right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \\ &= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \end{aligned}$$

- ▶ potřebujeme
 - ▶ separaci „správného“ kořene
 - ▶ zvolit vhodnou numerickou metodu

- ▶ řešená funkce

$$\begin{aligned} f(T_x) &= \hat{\alpha}(T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} = \left[\frac{a}{3}T^3 + \frac{b}{2}T^2 + cT \right]_{T_x}^{T_0} - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \\ &= \frac{a}{3}(T_0^3 - T_x^3) + \frac{b}{2}(T_0^2 - T_x^2) + c(T_0 - T_x) - \frac{r_0 - r_x}{r_0} \end{aligned}$$

- ▶ potřebujeme
 - ▶ separaci „správného“ kořene
 - ▶ zvolit vhodnou numerickou metodu
- ▶ koeficient u T_x^3 je kladný (a bylo záporné)
 - ▶ pro $T_x \rightarrow \infty$ také $f(T_x) \rightarrow \infty$
 - ▶ pro $T_x \rightarrow -\infty$ také $f(T_x) \rightarrow -\infty$

- ▶ derivace řešené funkce

$$f'(T_x) = -aT_x^2 - bT_x - c$$

- ▶ $f(T_x)$ má jedno lokální minimum a jedno maximum
 - ▶ v bodech, kde $f'(T_x) = 0$
 - ▶ numericky stabilní výpočet?
 - ▶ druhá přednáška ;-)
 - ▶ $b = -2.21 \times 10^{-8}$, $\sqrt{D} = 6.60 \times 10^{-8}$ je OK
 - ▶ při nepřesném určení by mohla Newtonova metoda zabloudit, viz dále
- ▶ vypočtené extrémy

$$T_1 = -265.544 \quad f(T_1) = 0.000867609$$

$$T_2 = 532.775 \quad f(T_2) = -0.00614507$$

- ▶ dva „nesmyslné“ kořeny $T_- < T_1$ a $T_+ > T_2$
 - ▶ nemají fyzikální význam
 - ▶ T_+ - čep se při vysokých teplotách začne smršťovat
 - ▶ T_- - při nízkých teplotách se začne znovu roztahovat
 - ▶ obojí důsledkem aplikace regresní křivky mimo rozsah hodnot, ze kterých byla určena
- ▶ skutečný kořen v intervalu $[T_1, T_2]$
- ▶ funkce je spojitá, kořen je právě jeden
 - ▶ dokonalá separace
- ▶ umíme jednoduše počítat derivaci
 - ▶ navíc je na (T_1, T_2) derivace nenulová
- ▶ Newtonova metoda je ideální

- ▶ numerická stabilita výpočtu $f(T)$ a $f'(T)$
 - ▶ rozsah T řádově ve stovkách
 - ▶ členy polynomu v řádech 10^{-5} - 10^{-2}
 - ▶ raději použijeme typ `double`
- ▶ potenciální problém Newtonovy metody $f'(T) \rightarrow 0$
 - ▶ nenastane díky známým vlastnostem funkce

Montáž ložiska

- ▶ Průběh výpočtu funkcí `rtnewt`
 - ▶ požadovaná absolutní přesnost 10^{-3}
 - ▶ nemá smysl více, vstupní data (koeficienty a, b, c) jsou méně přesné
 - ▶ a jak budeme při stavbě mostu chladit čep na takhle přesnou teplotu?

T	f(T)	f'(T)
133.615	-0.00263873	-1.31765e-05
-66.6454	-0.000221398	-9.85981e-06
-89.1	-8.66255e-06	-9.07435e-06
-90.0546	-1.68088e-08	-9.03911e-06
-90.0564	-6.3964e-14	-9.03904e-06

- ▶ v následujícím kroku už bylo dosaženo požadované přesnosti
- ▶ výsledek je -90.056°C

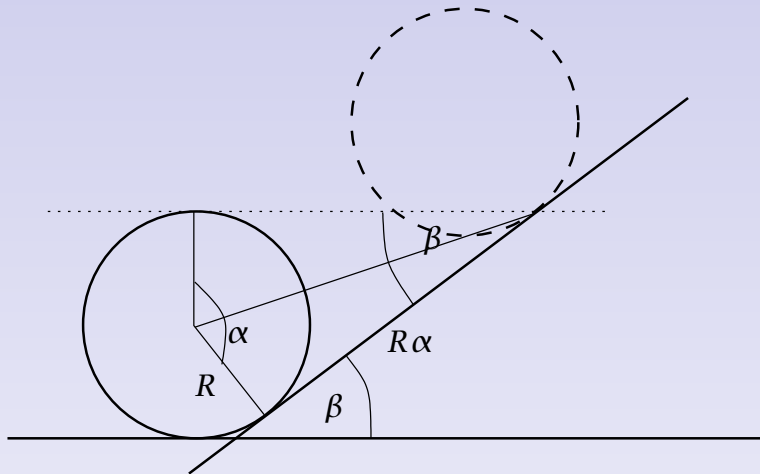
Artisté připravují nové vystoupení.

Na začátku se jeden z nich zachytí rukama i nohama v kruhové konstrukci o průměru 180 cm a další konstrukci vykoulí na plošinu.

Je třeba, aby se na konci tohoto pohybu původně nejvyšší bod kruhové konstrukce dotýkal plošiny a byl ve stejné výšce jako na začátku.

Jaká je potřebná délka a sklon plošiny?

Cirkusové číslo



- ▶ označíme
 - ▶ R - poloměr kruhu
 - ▶ α - úhel otočení kruhu (v radiánech)
 - ▶ β - úhel naklonění plošiny
- ▶ délka pohybu kruhu po plošině je $R\alpha$
- ▶ z naznačeného čtyřúhelníku odečteme
 - ▶ $\alpha + \beta = \pi$ (další dva úhly jsou pravé)
 - ▶ $\tan \frac{\beta}{2} = \frac{R}{R\alpha}$
- ▶ z toho vyplývá řešená rovnice

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\pi - \beta} \quad \text{tedy} \quad f(\beta) = (\pi - \beta) \tan \frac{\beta}{2} - 1 = 0$$

- ▶ separace kořene
 - ▶ β je ostrý úhel, tj. $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$
 - ▶ řešení je právě jedno
 - ▶ z geometrické podstaty problému
 - ▶ formulací rovnic jsme nepřidali falešný kořen
 - ▶ dáme si práci s exaktním důkazem nebo to rovnou zkusíme
- ▶ pro jistotu ověříme

$$f(0) = -1 \quad f(\pi/2) = 0.5707963$$

- ▶ numericky nebezpečná by byla až oblast $\beta \rightarrow \pi$
 - ▶ vedla by na součin typu $0 \cdot \infty$
 - ▶ pohybujeme se v bezpečné vzdálenosti
- ▶ budeme předstírat, že neumíme spočítat derivaci
- ▶ ukážeme metodu sečen, Riddersovu, a Brentovu

Cirkusové číslo

Metoda sečen, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

Montáž ložiska

Cirkusové číslo

Obchodní
případ

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+0.7853982	-0.0240323
4	+1.1780972	+0.3119657
5	+0.9817477	+0.1544612
6	+0.8835729	+0.0679638
7	+0.8344855	+0.0226702
8	+0.8099419	-0.0005027
9	+0.8222137	+0.0111281
...		
15	+0.8105171	+0.0000445
16	+0.8104212	-0.0000467

- ▶ počínaje třetím krokem výpočet vždy ve středu intervalu
- ▶ pomalá konvergence

Cirkusové číslo

Riddersova metoda, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+0.7853982	-0.0240323
4	+0.8103685	-0.0000968
5	+1.1905824	+0.3213144
6	+0.8104702	-0.0000001
7	+1.0005263	+0.1704016
(8)	+0.8104702	

4. první iterační výpočet
5. půlení intervalu mezi 2. a 4.
6. další iterace
7. půlení mezi 5. a 6.
8. výsledek, už je v toleranci

Cirkusové číslo

Brentova metoda, požadovaná absolutní přesnost 10^{-4}

n	beta	f(beta)
1	+0.0000000	-1.0000000
2	+1.5707963	+0.5707963
3	+1.0000000	+0.1699574
4	+0.7931377	-0.0165737
5	+0.8115179	+0.0009960
6	+0.8104759	+0.0000054
7	+0.8104259	-0.0000422
(8)	+0.8104759	

- ▶ počítá primárním způsobem, nedošlo na bezpečné půlení intervalů
- ▶ srovnatelně rychlá konvergence s Riddersem
- ▶ při větší požadované přesnosti se liší \pm o jeden krok

- ▶ všechny metody se v rámci požadované tolerance shodují
- ▶ rychlost konvergence dle očekávání
 - ▶ zdvojnásobení požadované přesnosti zdvojnásobí počet kroků půlení intervalů
 - ▶ Riddersova metoda naroste ze 7 na 9
 - ▶ Brentova dokonce jen ze 7 na 8
 - ▶ lepší výsledky než teoretická rychlost konvergence $\sqrt{2}$

- ▶ délka pohybu po plošině je

$$R\alpha = R(\pi - \beta) = 2.098$$

- ▶ zbývá spočítat část plošiny od země k bodu dotyku

$$\tan \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{R}{l} \quad \text{tedy} \quad l = \frac{R}{\tan((\pi - \beta)/2)} = 0.3861$$

- ▶ nehrozí významné numerické nepřesnosti
- ▶ celková délka plošiny je 2.484 m, sklon 46.44°

Obchodní případ

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.
Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

Americká garážová firma zahajuje montáž počítačů.

Kolik jich musí v prvním roce prodat, aby byla zisková?

- ▶ uvažované náklady
 - ▶ fixní jednorázové (pořízení vybavení): \$20000
 - ▶ fixní roční (nájem, web, ...): \$15000
 - ▶ variabilní (komponenty, hodinová sazba práce, ...): $\$625n$
 - ▶ semivariabilní (náročnější logistika atd.) $\$30n^{1.5}$
- ▶ předpokládané příjmy
 - ▶ prodej počítačů: $\$1500n$
 - ▶ slevy (množstevní, VIP zákazníci, ...): $-\$10n^{1.5}$

- ▶ řešená rovnice

$$f(n) = TC(n) - TS(n) = 35000 - 875n + 40n^{1.5} = 0$$

- ▶ první dva členy - lineární funkce
 - ▶ prochází bodem (0,35000)
 - ▶ osu x protíná v $35000/875 = 40$
- ▶ člen $40n^{1.5}$ způsobí „prohnutí“ nahoru
 - ▶ posune kořen z bodu 40 dál
 - ▶ přidá druhý kořen pro vyšší n
- ▶ zisku dosahujeme v oblasti mezi těmito kořeny

- ▶ separace 1. kořene
 - ▶ podle předchozí úvahy $f(40) > 0$, skutečná hodnota 10119
 - ▶ zkusíme $f(80) = -6378$, vyhovuje
- ▶ separace 2. kořene
 - ▶ předchozí $f(80) = -6378$
 - ▶ hrubý odhad zanedbáním absolutního členu

$$-875n + 40n^{1.5} = 0 \quad \text{tedy} \quad n = \left(\frac{875}{40}\right)^2 = 478.51$$

- ▶ zkusíme $f(500) = 44713$, vyhovuje
- ▶ numerická stabilita v dané separaci kořenů
 - ▶ součty/rozdíly čísel s minimálním řádovým rozdílem
 - ▶ reálně nás zajímá přesnost na jednotky
 - ▶ žádný potenciální problém

- ▶ vypočtené kořeny 62.7 a 384.0
- ▶ výsledky v požadované přesnosti shodné všemi metodami
- ▶ chování jednotlivých metod (počty iterací)

přesnost	10^{-1}		10^{-4}	
kořen	1	2	1	2
půlení	11	15	21	25
Ridders	5	9	7	11
Brent	5	9	7	10

- ▶ umělá přesnost 10^{-4} - zdvojnásobení počtu platných číslic
- ▶ dokládá očekávanou rychlost konvergence
 - ▶ lineární pro půlení intervalů
 - ▶ $\sqrt{2}$ pro ostatní metody