CLP(FD) - prohledávání

Vestavěné predikáty pro labeling

- Instanciace proměnné `Variable` hodnotami v její doméně

  `indomain( Variable )`

  hodnoty jsou instanciovány při backtrackingu ve vzrůstajícím pořadí

```
?- X in 4..5, indomain(X).
   X = 4 ? ;
   X = 5 ?

labeling( [] ).
labeling( [Var|Rest]  ) :-     % výběr nejlevější proměnné k instanciaci
     indomain( Var ),          % výběr hodnot ve vzrůstajícím pořadí
     labeling( Rest ).
```

- `labeling( Options, Variables )`

```
?- A in 0..2, B in 0..2, B#< A, labeling([], [A,B]).
```


Uspořádání hodnot a proměnných

- Při prohledávání je rozhodující **uspořádání hodnot a proměnných**
- Určují je **heuristiky výběru hodnot a výběru proměnných**

```
labeling( [] ).
labeling( Variables  ) :-
     select_variable(Variables,Var,Rest),
     select_value(Var,Value),
     ( Var #= Value,
       labeling( Rest )
     ;
       Var #\= Value ,          % nemusí dojít k instanciaci Var
       labeling( Variables )   % proto pokračujeme se všemi proměnnými včetně Var
     ).
```

- **Statické uspořádání:** určeno už před prohledáváním
- **Dynamické uspořádání:** počítá se během prohledávání

Výběr hodnoty

- Obecný princip výběru hodnoty: **první úspěch *(succeed first)***
  - volíme pořadí tak, abychom výběr nemuseli opakovat
  - `?- domain([A,B,C],1,2), A#=B+C.` optimální výběr A=2,B=1,C=1 je bez backtrackingu
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr hodnoty př. `labeling([down], Vars)`
  - up: doména procházena ve vzrůstajícím pořadí (default)
  - down: doména procházena v klesajícím pořadí
- Parametry `labeling/2` řídící, jak je výběr hodnoty realizován
  - `step`: volba mezi `X #= M, X #\= M` (default)
    - viz dřívější příklad u "Uspořádání hodnot a proměnných"
  - `enum`: vícenásobná volba mezi všemi hodnotami v doméně
    - podobně jako při `indomain/1`

Výběr proměnné

- Obecný princip výběru proměnné: ***first-fail***
  - výběr proměnné, pro kterou je nejobtížnější nalézt správnou hodnotu
    pozdější výběr hodnoty pro tuto proměnnou by snadněji vedl k failu
  - výbereme proměnnou **s nejmenší doménou**
  - `?- domain([A,B,C],1,3), A#<3, A#=B+C.` nejlépe je začít s výběrem A
- Parametry `labeling/2` ovlivňující výběr proměnné
  - `leftmost`: nejlevější (default)
  - `ff`: s (1) nejmenší velikostí domény `fd_size(Var,Size)`
    (2) (pokud s nejmenší velikostí domény více, tak) nejlevější z nich
  - `ffc`: s (1) nejmenší velikostí domény
    (2) největším množstvím omezením „čekajících" na proměnné `fd_degree(Var,Size)`
    (3) nejlevější z nich
  - `min/max`: s (1) nejmenší/největší hodnotou v doméně proměnné
    (2) nejlevnější z nich `fd_min(Var,Min)/fd_max(Var,Max)`

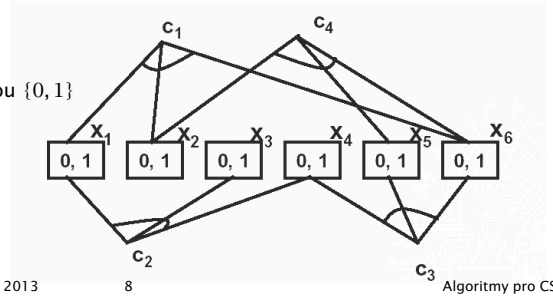
Hledání optimálního řešení (předpokládejme minimalizaci)

- Parametry `labeling/2` pro optimalizaci: `minimize(F)/maximize(F)`
  - `Cena #= A+B+C, labeling([minimize(Cena)], [A,B,C])`
- **Metoda větví a mezí *(branch&bound)***
  - algoritmus, který implementuje proceduru pro minimalizaci (duálně pro maximalizaci)
  - uvažujeme nejhorší možnou cenu řešení UB (např. cena už nalezeného řešení)
  - počítáme dolní odhad LB ceny částečného řešení
    LB je tedy nejlepší možná cena pro rozšíření tohoto řešení
  - procházíme strom a vyžadujeme, aby prozkoumávaná větev měla cenu $LB < UB$
    pokud je $LB \geq UB$, tak víme, že v této větvi není lepší řešení a odřízneme ji
    - přidává se tedy inkrementálně omezení LB#<UB pro snižující se UB tak, jak nalézáme kvalitnější řešení

Algoritmy pro řešení problému splňování podmínek (CSP)

Grafová reprezentace CSP

- **Reprezentace podmínek**
  - intenzionální (matematická/logická formule)
  - extenzionální (výčet k-tic kompatibilních hodnot, 0-1 matice)
- **Graf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje dva vrcholy)
- **Hypergraf:** vrcholy, hrany (hrana spojuje množinu vrcholů)
- Reprezentace CSP pomocí **hypergrafu podmínek**
  - vrchol = proměnná, hyperhrana = podmínka
- Příklad
  - proměnné $x_1, \ldots, x_6$ s doménou $\{0, 1\}$
  - omezení $c_1 : x_1 + x_2 + x_6 = 1$
    $c_2 : x_1 - x_3 + x_4 = 1$
    $c_3 : x_4 + x_5 - x_6 > 0$
    $c_4 : x_2 + x_5 - x_6 = 0$

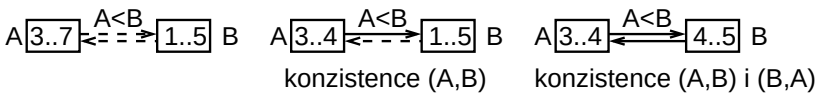


Binární CSP

- **Binární CSP**
  - CSP, ve kterém jsou pouze binární podmínky
  - unární podmínky zakódovány do domény proměnné
- **Graf podmínek** pro binární CSP
  - není nutné uvažovat hypergraf, stačí graf (podmínka spojuje pouze dva vrcholy)
- **Každý CSP lze transformovat na "korespondující" binární CSP**
- Výhody a nevýhody binarizace
  - získáváme unifikovaný tvar CSP problému, řada algoritmů navržena pro binární CSP
  - bohužel ale značné zvětšení velikosti problému
- Nebinární podmínky
  - složitější propagační algoritmy
  - lze využít jejich sémantiky pro lepší propagaci
    - příklad: `all_distinct` vs. množina binárních nerovností

Vrcholová a hranová konzistence

- **Vrcholová konzistence *(node consistency)* NC**
  - každá hodnota z aktuální domény V_i proměnné splňuje všechny unární podmínky s proměnnou V_i
- **Hranová konzistence *(arc consistency)* AC** pro **binární CSP**
  - **hrana** (V_i, V_j) **je hranově konzistentní**, právě když pro každou hodnotu x z aktuální domény D_i existuje hodnota y tak, že ohodnocení $[V_i = x, V_j = y]$ splňuje všechny binární podmínky nad V_i, V_j.
  - hranová konzistence je **směrová**
    - konzistence hrany (V_i, V_j) nezaručuje konzistenci hrany (V_j, V_i)



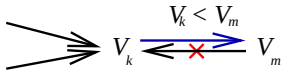
  - **CSP** je **hranově konzistentní**, právě když jsou všechny jeho hrany (v obou směrech) hranově konzistentní

Algoritmus revize hrany

- Jak udělat hranu (V_i, V_j) hranově konzistentní?
- Z domény D_i vyřadím takové hodnoty x, které nejsou konzistentní s aktuální doménou D_j (pro x neexistuje žádá hodnoty y v D_j tak, aby ohodnocení $V_i = x$ a $V_j = y$ splňovalo všechny binární podmínky mezi V_i a V_j)
- `procedure revise((`i, j`))`
  `Deleted := false`
  `for` $\forall x$ `in` D_i `do`
  `if neexistuje` $y \in D_j$ `takové, že` (x, y) `je konzistentní`
  `then` D_i `:=` $D_i - \{x\}$
  `Deleted := true`
  `end if`
  `return Deleted`
  `end revise`
- `domain([`V_1, V_2`],2,4),` V_1`#<` V_2 `revise((1,2))` smaže 4 z D_1,D_2 se nezmění

Dosažení hranové konzistence problému

- Jak udělat CSP hranově konzistentní?
  - revize je potřeba opakovat, dokud se mění doména nějaké proměnné
  - efektivnější: opakování revizí můžeme dělat pomocí **fronty**
    - přidáváme do ní hrany, jejichž konzistence mohla být narušena zmenšením domény
- Jaké hrany přesně revidovat po zmenšení domény?
  - ty, jejichž konzistence může být zmenšením domény proměnné narušena jsou to hrany (i, k), které vedou do proměnné V_k se zmenšenou doménou



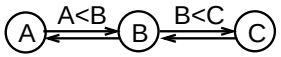
  - hranu (m, k) vedoucí z proměnné V_m, která zmenšení domény způsobila, není třeba revidovat (změna se jí nedotkne)

Algoritmus AC-3

- procedure AC-3(G)

```
Q := {(i,j) | (i,j) ∈ hrany(G), i ≠ j}    % seznam hran pro revizi
while Q non empty do
     vyber a smaž (k,m) z Q
     if revise((k,m)) then                    % pridani pouze hran, ktere
        Q := Q ∪ {(i,k) ∈ hrany(G), i ≠ k, i ≠ m}    % dosud nejsou ve fronte
end while
end AC-3
```

- Příklad:



A<B, B<C: (3..7,1..5,1..5) $\overset{AB}{\rightarrow}$ (3..4,1..5,1..5) $\overset{BA}{\rightarrow}$
(3..4,4..5,1..5) $\overset{BC}{\rightarrow}$ (3..4,4,1..5) $\overset{CB}{\rightarrow}$ (3..4,4,5)
$\overset{AB}{\rightarrow}$ (3,4,5)

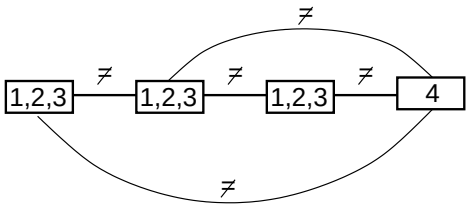
- Technika AC-3 je dnes asi nejpoužívánější, ale stále není optimální
- Jaké budou domény A,B,C po AC-3 pro: `domain([A,B,C],1,10), A #= B + 1, C #< B`

Je hranová konzistence dostatečná?

- Použitím AC odstraníme mnoho nekompatibilních hodnot
  - Dostaneme potom řešení problému? NE
  - Víme alespoň zda řešení existuje? NE
- `domain([X,Y,Z],1,2), X#\= Y, Y#\= Z, Z#\= X`
  - hranově konzistentní
  - nemá žádné řešení
- Jaký je tedy význam AC?
  - někdy dá řešení přímo
    - nějaká doména se vyprázdní ⇒ řešení neexistuje
    - všechny domény jsou jednoprvkové ⇒ máme řešení
  - v obecném případě se alespoň zmenší prohledávaný prostor

k-konzistence

- Mají NC a AC něco společného?
  - NC: konzistence jedné proměnné
  - AC: konzistence dvou proměnných
  - . . . můžeme pokračovat
- CSP je **k-konzistentní** právě tehdy, když můžeme libovolné konzistentní ohodnocení (k-1) různých proměnných rozšířit do libovolné k-té proměnné

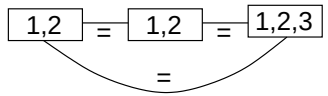


4-konzistentní graf

- Pro obecné CSP, tedy i pro nebinární podmínky

Silná k-konzistence

3-konzistentní graf



není 2-konzistentní

$(1,1)$ lze rozšířit na $(1,1,1)$

$(2,2)$ lze rozšířit na $(2,2,2)$

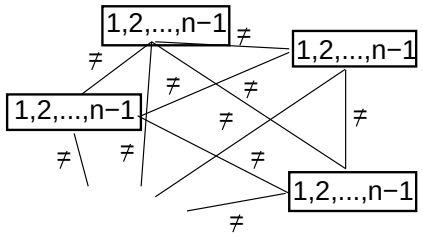
(3) nelze rozšířit

$(1,3)$ ani $(2,3)$ nejsou konzistentní dvojice (nerozšiřujeme je)

- CSP je **silně k-konzistentní** právě tehdy, když je j-konzistentní pro každé j≤k
- Silná k-konzistence ⇒ k-konzistence
- Silná k-konzistence ⇒ j-konzistence $\forall j \leq k$
- k-konzistence ⇏ silná k-konzistence
- NC = silná 1-konzistence = 1-konzistence
- AC = (silná) 2-konzistence

Konzistence pro nalezení řešení

- Máme-li graf s n vrcholy, jak silnou konzistenci potřebujeme, abychom přímo našli řešení?
  - silná n-konzistence je nutná pro graf s n vrcholy
    - n-konzistence nestačí (viz předchozí příklad)
    - silná k-konzistence pro k<n také nestačí



graf s n vrcholy
domény 1..(n-1)

silně k-konzistentní pro každé k<n
přesto nemá řešení