4. termín závěrečné písemky — MB101 — jaro 2013 — 26. 6.

SKUPINA — A

Na řešení je 100 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (5 bodů) Uvažujme lineární zobrazení φ z roviny $\mathbb{R}^2$ do sebe, které má ve standardní bázi $\epsilon = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ matici $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Víme, že $\varphi((1,1)^T) = (1,3)^T$ a $\varphi((1,2)^T) = (2,4)^T$, tzn.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

i) Určete matici A.

ii) Určete $\varphi((2,1)^T)$.

2. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete vzdálenost mimoběžek

$$p : [1,3,-1] + s(2,0,1) \quad \text{a} \quad q : [-2,0,-1] + t(3,1,2)\,.$$

Dále najděte body, v nichž se vzdálenost realizuje, tj. určete krajní body osy mimoběžek p a q.

3. Uvažujme následující příklad jako Leslieho populační model.

JZD Chvojkovice-Brod se zabývá, mimo jiné, velkochovem prasat. Chov se řídí půlročním cyklem a proto prasata rozdělují do čtyř věkových kategorií: malá selata (0–0,5 roku), větší selata (0,5–1 rok), mladší prasnice (1–1,5 roku) a starší prasnice (1,5–2 roky). Prasata ve sledovaných kategoriích jsou samice, pouze v kategorii malých selat jsou zahrnuta všechna selata, která se dožijí konce půlročního období. Po ukončení půlročního období a přepočítání prasat ve všech kategorií se v novém období postupuje takto.

- Malá selata jsou rozdělena na samce, kteří se prodají, a na samice, které zůstávají v chovu, přičemž těchto samic je polovina z celkového počtu malých selat. Na konci nového období z nich jsou velká selata.
- Velká selata se pouze krmí, na konci nového období jsou ze všech mladší prasnice.
- Mladší prasnice se nechají zapustit a v průměru vrhnou 11 zdravých selat na jednu prasnici. Přitom 10% z mladších prasnic uhyne a 90% přežívá – na konci nového období jsou z nich starší prasnice.
- Starší prasnice se také zapustí a v průměru vrhnou 10 zdravých selat. Na konci nového období jsou však starší prasnice odeslány na jatka.

Tímto způsobem se chtějí o chov prasat starat dlouhodobě. Určete, kolik procent velkých selat mohou během každého období prodat, aby měli stabilizovaný chov.

4. (5 bodů) Určete explicitní formuli pro posloupnost celých čísel, která je dána následující rekurentní formulí a počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = 4(x_{n+1} - x_n), \quad x_0 = 2,\ x_1 = 8\,.$$

4. termín závěrečné písemky — MB101 — jaro 2013 — 26. 6.

SKUPINA — B

Na řešení je 100 minut. Pište jen na přední strany listů. (Zadní strany nebudou opraveny ani skenovány.)

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

5. (5 bodů) Uvažujme lineární zobrazení φ z roviny $\mathbb{R}^2$ do sebe, které má ve standardní bázi $\epsilon = ((1,0)^T, (0,1)^T)$ matici $(\varphi)_{\epsilon,\epsilon} = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Víme, že $\varphi((1,1)^T) = (1,1)^T$ a $\varphi((1,2)^T) = (3,1)^T$, tzn.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i) Určete matici A.

ii) Určete $\varphi((2,1)^T)$.

6. (5 bodů) V prostoru $\mathbb{R}^3$ určete vzdálenost mimoběžek

$$p : [3,3,0] + s(0,2,-1) \quad \text{a} \quad q : [1,1,-1] + t(1,3,-2)\,.$$

Dále najděte body, v nichž se vzdálenost realizuje, tj. určete krajní body osy mimoběžek p a q.

7. Uvažujme následující příklad jako Leslieho populační model.

JZD Chvojkovice-Brod se zabývá, mimo jiné, velkochovem prasat. Chov se řídí půlročním cyklem a proto prasata rozdělují do čtyř věkových kategorií: malá selata (0–0,5 roku), větší selata (0,5–1 rok), mladší prasnice (1–1,5 roku) a starší prasnice (1,5–2 roky). Prasata ve sledovaných kategoriích jsou samice, pouze v kategorii malých selat jsou zahrnuta všechna selata, která se dožijí konce půlročního období. Po ukončení půlročního období a přepočítání prasat ve všech kategorií se v novém období postupuje takto.

- Malá selata jsou rozdělena na samce, kteří se prodají, a na samice, které zůstávají v chovu, přičemž těchto samic je polovina z celkového počtu malých selat. Na konci nového období z nich jsou velká selata.
- Velká selata se pouze krmí, na konci nového období jsou ze všech mladší prasnice.
- Mladší prasnice se nechají zapustit a v průměru vrhnou 8 zdravých selat na jednu prasnici. Přitom 20% z mladších prasnic uhyne a 80% přežívá – na konci nového období jsou z nich starší prasnice.
- Starší prasnice se také zapustí a v průměru vrhnou 15 zdravých selat. Na konci nového období jsou však starší prasnice odeslány na jatka.

Tímto způsobem se chtějí o chov prasat starat dlouhodobě. Určete, kolik procent velkých selat mohou během každého období prodat, aby měli stabilizovaný chov.

8. (5 bodů) Určete explicitní formuli pro posloupnost celých čísel, která je dána následující rekurentní formulí a počátečními podmínkami:

$$x_{n+2} = 4(x_{n+1} - x_n), \quad x_0 = 1,\ x_1 = 6\,.$$

Výsledky - skupina A

1. i) Pro neznámé a, b, c, d v matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sestavíme soustavu rovnic, kde dvě rovnice obsahují neznámé a, b a dvě c, d. Po vyřešení dostaneme $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Platí $\varphi((2,1)^T) = A \cdot (2,1)^T = (1,5)^T$.

Bodování: sestavení soustavy 1b, vyřešení soustavy 2b, výsledná matice 1b, výsledek ii) 1b.

2. Vektor kolmý ke směrovým vektorům přímek p a q je $(1,1,-2)$. Rovina obsahující přímku p se zaměřením obsahujícím vektor $(1,1,-2)$ je $[1,3,-1] + s(2,0,1) + a(1,1,-2)$ a hledáme průnik s přímkou q : $[-2,0,-1] + t(3,1,2)$. Příslušná soustava rovnic, kterou dostaneme z rovnosti $[1,3,-1] + s(2,0,1) + a(1,1,-2) = [-2,0,-1] + t(3,1,2)$, má řešení $s = 2$, $a = -1$ a $t = 2$. Proto dostáváme krajní body osy mimoběžek $P = [1,3,-1] + 2 \cdot (2,0,1) = [5,3,1] \in p$ a $Q = [-2,0,-1] + 2 \cdot (3,1,2) = [4,2,3] \in q$. Vektor $\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,2)$ má velikost $\sqrt{6}$, což je vzdálenost daných mimoběžek. (Lze řešit i jinými způsoby.)

Bodování: vzdálenost 3b, krajní body 2b .

3. Leslieho matice je

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odebíráním velkých selat měníme číslo 1 na jinou hodnotu, řekněme x, tj. upravená matice je

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}.$$

My hledáme takové x, aby matice L' měla vlastní číslo 1. Tedy chceme, aby platilo $|L' - E| = 0$. Výpočtem tohoto determinantu dostaneme rovnici $1 - 10x = 0$ s řešením $x = 0.1$. Chovatelé tedy budou nechávat v chovu 10 % velkých selat a 90 % budou prodávat.

Bodování: Matice L 1b, matice L' 1b, determinant $L - E$ 1b, výpočet parametru x z rovnice $|L - E| = 0$ 1b, interpretace (odpověď) 1b.

4. Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Proto $x_n = a2^n + bn2^n$ a hledáme a a b porovnáním vyjádření x_n s počátečními podmínkami. Dostaneme $a + 0 \cdot b = 2$ (pro $n = 0$) a $2a + 2b = 8$ (pro $n = 1$), tudíž $a = 2$ a $b = 2$. Odtud $x_n = (n+1)2^{n+1}$.

Bodování: charakteristický polynom 1b, kořeny 1b, předpokládaný tvar pro x_n 1b, nalezení parametrů a, b 2b.

Výsledky - skupina B

5. i) $A = \begin{pmatrix} = -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. ii) $\varphi((2,1)^T) = A \cdot (2,1)^T = (0,2)^T$.

6. Vektor kolmý ke směrovým vektorům přímek p a q je $(1,1,2)$. Krajní body osy mimoběžek $P = [3,3,0] + 1 \cdot (0,2,-1) = [3,5,-1] \in p$ a $Q = [1,1,-1] + 1 \cdot (1,3,-2) = [2,4,-3] \in q$. Vektor $\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,-2)$ má velikost $\sqrt{6}$, což je vzdálenost daných mimoběžek.

7. Leslieho matice je

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 15 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odebíráním velkých selat měníme číslo 1 na jinou hodnotu, řekněme x, tj. upravená matice je

$$L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 15 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

My hledáme takové x, aby matice L' měla vlastní číslo 1. Tedy chceme, aby platilo $|L' - E| = 0$. Výpočtem tohoto determinantu dostaneme rovnici $1 - 10x = 0$ s řešením $x = 0.1$. Chovatelé tedy budou nechávat v chovu 10 % velkých selat a 90 % budou prodávat.

8. Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Proto $x_n = a2^n + bn2^n$ a hledáme a a b porovnáním vyjádření x_n s počátečními podmínkami. Dostaneme $a + 0 \cdot b = 1$ (pro $n = 0$) a $2a + 2b = 6$ (pro $n = 1$), tudíž $a = 1$ a $b = 2$. Odtud $x_n = (2n + 1)2^n$.