



Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

Cvičení k předmětům

IB005 Formální jazyky a automaty a

IB102 Automaty, gramatiky a složitost

poslední modifikace 12. února 2014

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Formální jazyky a automaty I*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě chyb a doplnění příkladů se podílelo mnoho studentů a cvičící předmětů *IB005* a *IB102* Jirí Barnat, Vojtěch Řehák a Jan Strejček.

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 Jsou dány jazyky L_1, L_2 nad abecedou $\{x, y, z\}$, kde $L_1 = \{xy, y, yx\}$, $L_2 = \{y, z\}$. Vypočítejte:

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 \cdot L_2, L_2 \cdot L_1$
- $L_2^0, L_2^1, L_2^2, L_2^3, L_2^*, L_2^+$
- $co - L_2$

1.2 Vypočítejte:

- $\emptyset^*, \emptyset^+, \{\varepsilon\}^*, \{\varepsilon\}^+$
- $\emptyset \cup \{\varepsilon\}, \emptyset \cap \{\varepsilon\}, \emptyset \cap L, \{\varepsilon\} \cap L$
- $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}, \emptyset \cdot L, \{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\} \cdot L$

1.3 Jsou dané jazyky $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, kde $L_1 = \{a, aa, ba\}$, $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$.

- Vypočítejte $L_1 \cup L_2$.
- Vypočítejte $L_1 \cap L_2$.
- Vypočítejte $L_1 \cdot L_2$.
- Rozhodněte, zda platí $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.
- Najděte slovo $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$.
- Rozhodněte, zda platí $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$. Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků L_1, L_2 ? Pro pokročilé: platí $\varepsilon \in L_2 \iff L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$?
- Rozhodněte, zda platí
 - $• aabaabc \in L_2^4$
 - $• baaabc \in L_2^6$
 - $• ababc \in L_2^3$
- Popište $co - L_2$ (komplement jazyka L_2).

1.4 Buď L libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$
- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$
- najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

1.5 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_4$

- $• L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $• L_2 = \{xyz\}^*$
- $• L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $• L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $• L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$

- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.6 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.7 Pomocí jazyků $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ nad abecedou $\{a, b\}$ a množinových operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), konkatenace (\cdot), iterace (* , $^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk, obsahující všechna slova, která

- obsahují alespoň 2 znaky a
- mají sudou délku
- začínají znakem a a končí znakem b
- začínají a končí stejným znakem
- obsahují podslovo aba
- splňují b) a c)
- nesplňují b)

1.8 Pro libovolné jazyky L_1 , L_2 , L_3 dokažte, zda platí, nebo neplatí:

- $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
- $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
- $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
- pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
- $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
- $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

1.9 Jaký jazyk generuje gramatika G a jakého je typu?

- $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid cAd, \\ cA \rightarrow aB \mid Ca, \\ Bd \rightarrow Sb \mid A, \\ Cad \rightarrow ab \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$
- $G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$, kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow bS \mid cS \mid aA, \\ A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid a \mid b \mid c \end{array} \right\}$$

1.10 Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů ($S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}$).

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bC, \\ B \rightarrow aC \mid bS, \\ C \rightarrow aB \mid bA \end{array} \right\}$$

1.11 Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

- $L = \{a, b, c, d\}^*$

- b) $L = \{a, b, c, d\}^i \{a, b, c, d\}^*$; $i = 2, 10, 100$
- c) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$
- d) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k, k \geq 0\}$
- e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$
- f) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- g) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \text{první 3 znaky } w = \text{poslední 3 znaky } w\}$
- h) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } abb\}$
- i) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1, k, l \geq 0\}$
- j) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 5}\}$
- k) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 3}\}$
- l) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 25}\}$

Deterministické konečné automaty, pumping lemma

2.1 Je dán následující konečný automat: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

- Uveďte jinou formu zápisu automatu.
- Popište jazyk akceptovaný konečným automatem A .
- Diskutujte variantu konečného automatu, kde $F = \{q_3, q_2\}$; $\delta(q_3, a) = q_0$

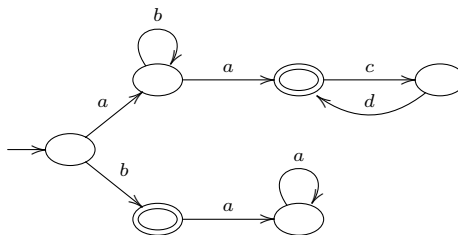
2.2 Konstruuje **deterministické** FA, které rozpoznávají následující množiny

- $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$
- $\{w \mid w \in \{a\}^*; |w| = 2k \text{ nebo } |w| = 7l; k, l \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } ababb\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ neobsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$
- $(\{a\} \cup \{b\}) \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\}) \cdot \{b\}^*$

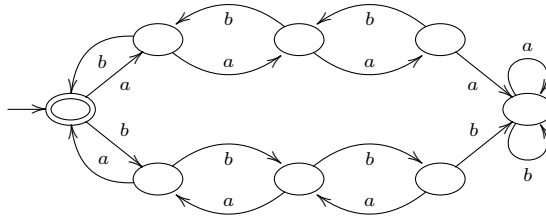
2.3 Konstruuje **deterministické** FA pro následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$

- $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje slovo } babb\}$
- $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

2.4 Pomocí množin $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ a množinových operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), konkatenace (\cdot), iterace ($^*, ^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



2.5 Co akceptuje následující automat? ($\#_a(w) = \#_b(w)$ je špatná odpověď)



2.6 Pomocí věty o vkládání dokažte, že jazyk L není regulární:

- a) $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$
- b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- c) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- d) $L = \{a^n \mid n = 2^i; i \geq 0\}$
- e) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j; i, j \geq 0\}$
- f) $L = \{a^n b^{(n!)^2} \mid n \geq 0\}$
- g) $L = \{c^i a^j b^k \mid j \leq k; i, j, k \in \mathbb{N}\}$

2.7 Pro pokročilé: Zkonstruujte konečný automat A rozpoznávající jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Dokažte, že automat rozpoznává zadaný jazyk, tedy že $L(A) = L$.

2.8 Konstruujte **deterministické** FA pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11.

Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

3.1 Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruuje minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

| | a | b |
|-----------------|-----|-----|
| $\rightarrow 1$ | 2 | 3 |
| 2 | 5 | 2 |
| 3 | 3 | 5 |
| $\leftarrow 4$ | 12 | 2 |
| $\leftarrow 5$ | 7 | 8 |
| 6 | 4 | 9 |
| 7 | 12 | 11 |
| 8 | 4 | 6 |
| 9 | 10 | 8 |
| $\leftarrow 10$ | 3 | 2 |
| $\leftarrow 11$ | 12 | 6 |
| 12 | 3 | 10 |

b)

| | a | b |
|---------------------|-----|-----|
| $\leftrightarrow 1$ | 3 | 2 |
| 2 | 6 | 4 |
| 3 | 3 | 5 |
| $\leftarrow 4$ | 4 | 2 |
| 5 | 10 | 8 |
| 6 | 6 | 7 |
| $\leftarrow 7$ | 7 | 5 |
| $\leftarrow 8$ | 8 | 2 |
| $\leftarrow 9$ | 11 | 2 |
| 10 | 10 | 9 |
| $\leftarrow 11$ | 11 | 5 |

3.2 Odstraňte nedosažitelné stavy z DFA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převed'te do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou vpravo.

a)

| | a | b |
|-----------------|-----|-----|
| $\rightarrow 1$ | 5 | 2 |
| 2 | 2 | 8 |
| 3 | 2 | 7 |
| $\leftarrow 4$ | 9 | 4 |
| 5 | 2 | 1 |
| 6 | 2 | 5 |
| $\leftarrow 7$ | 8 | 6 |
| 8 | 2 | 4 |
| 9 | 8 | 9 |

| | a | b |
|-----------------|-----|-----|
| $\rightarrow 1$ | 4 | 2 |
| 2 | 2 | 5 |
| 3 | 3 | 6 |
| 4 | 4 | 2 |
| $\leftarrow 5$ | 5 | 3 |
| $\leftarrow 6$ | 6 | 2 |

b)

| | <i>a</i> | <i>b</i> |
|-----|----------|----------|
| 1 | 3 | 1 |
| → 2 | 9 | 4 |
| 3 | – | 1 |
| ← 4 | 9 | 4 |
| 5 | 8 | 5 |
| 6 | 5 | 4 |
| ← 7 | 6 | 9 |
| 8 | 11 | – |
| 9 | 7 | 9 |
| 10 | 12 | 3 |
| 11 | 8 | 1 |
| 12 | – | 10 |

| | <i>a</i> | <i>b</i> |
|-----|----------|----------|
| A | B | A |
| ← B | C | A |
| C | D | E |
| D | D | D |
| → E | A | E |

3.3 Ověřte, zda DFA z příkladu 3.1 a) je ekvivalentní s následujícím DFA zadaným tabulkou

| | <i>a</i> | <i>b</i> |
|-----|----------|----------|
| A | A | C |
| → B | D | A |
| ← C | D | A |
| D | C | D |

3.4 Navrhněte nedeterministické konečné automaty pro následující jazyky:

- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } bba \text{ nebo } aba\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abbc \text{ nebo } acbca \text{ nebo } bcabb\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } aaaa\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ má čtvrtý symbol od konce } 1\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } 01011\}$
- $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$
- $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

3.5 K daným nedeterministickým FA zkonstrujte deterministické FA.

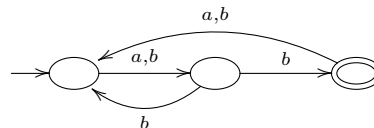
a)

| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|-----|----------|----------|----------|
| → 1 | {2,3} | {3,4} | {1} |
| ← 2 | {3} | {4} | {2} |
| 3 | {1,2,3} | {1} | {3,4} |
| 4 | {1} | {1} | {3,4} |

b)

| | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> |
|-----|----------|----------|----------|
| → 1 | {1,2} | {1} | {1} |
| ← 2 | ∅ | {3} | ∅ |
| 3 | ∅ | ∅ | {4} |
| 4 | {5} | ∅ | ∅ |
| 5 | ∅ | {6} | ∅ |
| 6 | {7} | ∅ | ∅ |
| ← 7 | ∅ | ∅ | ∅ |

3.6 Popište jazyk akceptovaný automatem:



3.7 Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou $\{x\}$ nebo $\{x, y\}$?

3.8 Dokažte, že neexistuje automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 4\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 5k, k \in \mathbb{N}_0\}$

3.9 Najděte relaci $\sim \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$, splňující podmínky Nerodovy věty a určete její index. Pro jazyk L :

• $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$

3.10 Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhill-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

a) $L = \{a^n \mid n = 2^i, i \geq 0\}$

b) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n, n, m > 0\}$

c) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$

3.11 Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

• $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 3k, k \geq 0\}$

3.12 Každý jazyk jednoznačně určuje relaci \sim_L předpisem $u \sim_L v$ právě když pro každé w platí $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Určete index této relace pro jazyky:

a) $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

3.13 Nechť $\Sigma = \{a, b\}$. Uvažte následující relace na množině Σ^* :

a) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$

b) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ nebo u i v končí na stejné písmeno

c) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ a u i v končí na stejné písmeno

(Prázdné slovo končí na stejné písmeno jako prázdné slovo, ale žádné neprázdné slovo na stejné písmeno nekončí.) U každé relace určete, zda je to ekvivalence. Pokud ano, určete její index a zda je pravou kongruencí. Pokud ano, nalezněte jazyk L takový, že $\sim_L = \sim$. Nakonec nalezněte jazyk L' , který je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^*/\sim , ale přitom $\sim_{L'} \neq \sim$.

Regulární gramatiky a výrazy \Leftrightarrow FA, ε -kroky, Kleeneho věta

4.1 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow aA \mid bC \mid a \mid \varepsilon,$$

$$A \rightarrow bB \mid aA \mid b \mid c,$$

$$B \rightarrow aB \mid bC \mid aC \mid cA \mid c,$$

$$C \rightarrow a \mid b \mid aA \mid bB \}$$

4.2 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

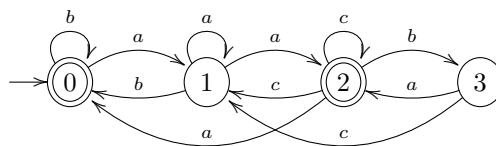
$$P = \{ S \rightarrow aX \mid bY \mid c,$$

$$X \rightarrow bX \mid bS,$$

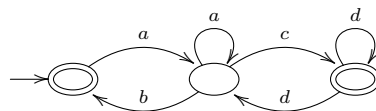
$$Y \rightarrow bS \mid cZ,$$

$$Z \rightarrow aS \mid b \mid c \}$$

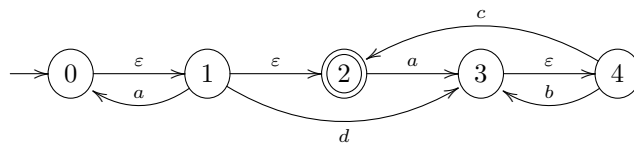
4.3 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



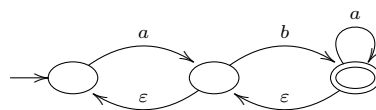
4.4 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



4.5 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.



4.6 K danému automatu s ε -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε -kroků.



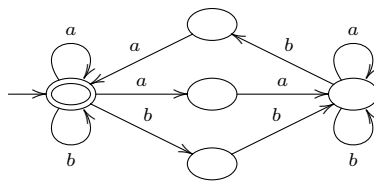
4.7 K danému automatu s ε -kroky zkonstruuje ekvivalentní automat bez ε -kroků.

| | a | b | c | ε |
|-----------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| $\rightarrow 1$ | $\{1,2\}$ | \emptyset | \emptyset | $\{2\}$ |
| 2 | $\{5\}$ | $\{3,5\}$ | \emptyset | \emptyset |
| 3 | \emptyset | $\{6\}$ | \emptyset | \emptyset |
| 4 | \emptyset | $\{4\}$ | \emptyset | $\{1,5\}$ |
| 5 | $\{5\}$ | \emptyset | $\{3\}$ | $\{6\}$ |
| $\leftarrow 6$ | \emptyset | \emptyset | $\{3,6\}$ | $\{2\}$ |

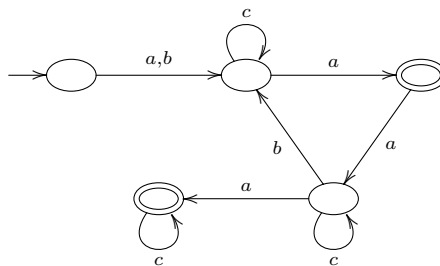
4.8 K danému regulárnímu výrazu zkonstruuje ekvivalentní FA

- $(ab)^*(aa + bb)(a + ab)^*$
- $((a + b(a + c))^* + (b + c))^*$
- $((a + b)^* + c)^* + d)^*$

4.9 K danému FA zkonstruuje ekvivalentní regulární výraz



4.10 K danému FA zkonstruuje ekvivalentní regulární výraz



4.11 Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ končí na } ab\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ začíná a končí stejným symbolem}\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

4.12 Ukažte, jaký je vztah mezi třídou regulárních jazyků \mathcal{R} a nejmenší třídou

- M_1 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku (\cup, \cdot, \cap).
- M_2 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu ($\cup, \cap, co-$).
- M_3 , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině ($\cup, \cap, ^n$).

Uzávěrové vlastnosti \mathcal{R}

5.1 Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky L_1, L_2, L_3, \dots regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

5.2 Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků L_1, L_2, L_3, \dots aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

5.3 Nechť L_1, L_2 jsou neregulární jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvráťte, zda je či není regulární:

- a) $L_1 \cap L_2$
- b) $L_1 \cup L_2$
- c) $L_1 \setminus L_2$
- d) $L_1 \cdot L_2$
- e) L_1^*
- f) $co-L_1$

5.4 Nechť L_1 je regulární a $L_1 \cap L_2$ je neregulární jazyk. Platí, že jazyk L_2 je nutně neregulární?

5.5 Platí následující implikace?

- a) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je neregulární
- b) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je regulární
- c) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je neregulární
- d) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je regulární
- e) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je neregulární
- f) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je regulární

5.6 Def: operace \odot rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky L_1 a L_2 regulární, pak i jazyk $L_1 \odot L_2$ je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky L_1 a L_2 , aby jazyk $L_1 \odot L_2$ byl regulární.

5.7 Nechť L je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky $L^\#$ jsou regulární:

- a) $L^\# = \{v \mid \text{existuje } u \text{ takové, že } u \cdot v \in L\}$
- b) $L^\# = \{w \mid \text{existuje } x, y, z \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

5.8 Dokažte, že pro libovolný jazyk L a libovolný konečný jazyk K platí:

- a) L je regulární $\iff L \cup K$ je regulární
- b) L je regulární $\iff L \setminus K$ je regulární

5.9 Def: Homomorfismus $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Def: Nechť L je jazyk, pak $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$

Def: Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc $h(c) = \varepsilon$ pak $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že \mathcal{R} je uzavřena na h, h^{-1} .

5.10 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h ; $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$. Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

5.11 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h ; $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$. Určete:

- $h^{-1}(aabaabaaba)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

5.12 Dokažte nebo vyvráťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

Bezkontextové gramatiky

6.1 Co generují tyto gramatiky?

$$\text{a) } G = (\{S, B, A\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aB \mid bA \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bAA, \\ B \rightarrow bS \mid aBB \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aAS \mid a, \\ A \rightarrow ba \mid Sba \end{array} \right\}$$

6.2 Pro následující gramatiku

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AaB \mid BaA, \\ A \rightarrow AB \mid a, \\ B \rightarrow BB \mid b \end{array} \right\}$$

- najděte derivační strom s výsledkem *bbbbaa*
- je tento strom určený jednoznačně?
- kolik různých nejlevějších odvození má slovo *bbbbaa*
- je gramatika jednoznačná?
- je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.3 Jaké mají charakteristické vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

6.4 Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

6.5 Odpovězte zda pro

$$G = (\{S\}, \{a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \{ S \rightarrow SSS \mid a \}$$

- je gramatika jednoznačná?
- je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.6 Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$.

6.7 Navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ nebo } j \neq k\}$, je gramatika jednoznačná?

6.8 Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$$G = (\{S, A, B, C, E, F, D\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB, \\ A \rightarrow aAB \mid aa \mid AC \mid AE, \\ B \rightarrow bBA \mid bb \mid CB \mid BF, \\ C \rightarrow DE, \\ D \rightarrow cc \mid DD, \\ E \rightarrow FF \mid FE, \\ F \rightarrow EcE \end{array} \right\}$$

6.9 Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

6.10 Je jazyk generovaný gramatikou G bezkontextový?

$$G = (\{S, T\}, \{x, y\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow xT, \\ T \rightarrow Sx, \\ xTx \rightarrow y \end{array} \right\}$$

6.11 Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

- a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
- b) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w = w^R\}$
- c) $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$
- d) $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$
- e) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$
- f) $L = \{uxv \mid u, x, v \in \{a, b, c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$
- g) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$
- h) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.1 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC,$$

$$A \rightarrow AbA \quad | \quad BC,$$

$$B \rightarrow bB \quad | \quad b \quad | \quad cBbAa \quad | \quad \varepsilon,$$

$$C \rightarrow cD \quad | \quad c \quad | \quad Ab \quad | \quad \varepsilon,$$

$$D \rightarrow SSS \quad | \quad b \}$$

7.2 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC,$$

$$A \rightarrow Ab \quad | \quad BC,$$

$$B \rightarrow bB \quad | \quad b \quad | \quad Ab \quad | \quad \varepsilon,$$

$$C \rightarrow cD \quad | \quad c \quad | \quad Ac \quad | \quad \varepsilon,$$

$$D \rightarrow SSS \quad | \quad cSAc \}$$

7.3 Odstraňte ε -pravidla:

$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow 1X \quad | \quad Y1 \quad | \quad XZ,$$

$$X \rightarrow 0YZ1 \quad | \quad S1X \quad | \quad Y,$$

$$Y \rightarrow 1 \quad | \quad X1 \quad | \quad \varepsilon,$$

$$Z \rightarrow SZ \quad | \quad 0 \quad | \quad \varepsilon \}$$

7.4 Význam konstrukce množin N_ε na příkladu

$$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \{ A \rightarrow BC \quad | \quad a \quad | \quad \varepsilon,$$

$$B \rightarrow aB \quad | \quad ACC \quad | \quad b,$$

$$C \rightarrow cC \quad | \quad AA \quad | \quad c \}$$

7.5 Odstraňte jednoduché pravidla. Diskuse o významu N_A .

$$G = (\{S, X, Y, A, D, B, C\}, \{b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow X \quad | \quad Y,$$

$$A \rightarrow bS \quad | \quad D,$$

$$D \rightarrow ba,$$

$$B \rightarrow Sa \quad | \quad a,$$

$$X \rightarrow aAS \quad | \quad C,$$

$$C \rightarrow aD \quad | \quad S,$$

$$Y \rightarrow SBb \}$$

7.6 Převed'te do Chomského normální formy

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow SaSbS \quad | \quad aAa \quad | \quad bBb,$$

$$A \rightarrow aA \quad | \quad aaa \quad | \quad B \quad | \quad \varepsilon,$$

$$B \rightarrow Bb \quad | \quad bb \quad | \quad b \}$$

7.7 Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0H1 \mid 1L0 \mid \varepsilon, \\ H \rightarrow HH \mid 0H1 \mid LH \mid \varepsilon, \\ L \rightarrow LL \mid 1L0 \mid HL \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

7.8 Navrhněte gramatiku v CNF:

a) $L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\}$
 b) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

7.9 Necht' G je gramatika v CNF. Necht' $w \in L(G)$, $|w| = n$. Jaká je minimální a maximální délka odvození slova w v G ?

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid SbB, \\ A \rightarrow AAb \mid ab \mid SBb, \\ B \rightarrow Bbb \mid BBB \mid bAb \end{array} \right\}$$

7.11 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A1 \mid 0 \mid 1B, \\ A \rightarrow BS0 \mid 10 \mid SB0, \\ B \rightarrow 0B \mid B1B \mid S0 \end{array} \right\}$$

7.12 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, X, Y\}, \{c, d, b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Xc \mid Yd \mid Yb, \\ X \rightarrow Xb \mid a, \\ Y \rightarrow SaS \end{array} \right\}$$

7.13 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, T\}, \{t, s\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow TTt \mid Tt \mid TS \mid s, \\ T \rightarrow SsT \mid TsT \mid t \end{array} \right\}$$

7.14 Transformujte do Greibachové NT. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \rightarrow CD \mid AB, \\ C \rightarrow Aa \mid b, \\ D \rightarrow bA \mid DD \end{array} \right\}$$

7.15 Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

a) $L = \{wcv \mid w \in \{a, b\}^*\}$
 b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$
 c) $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\}$

Zásobníkové automaty

8.1 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, \varepsilon, A) &= \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, d, A) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} \\ \delta(q_3, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} & & \end{aligned}$$

- Načrtněte stavový diagram ZA A .
- Naznačte 4 různé výpočty na vstupu a^4b^2c (stačí na obrázku).
- Popište jazyk $L(A)$.

8.2 Je daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$, kde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\ \delta(q_1, a, Y) &= \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_2, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) &= \{(q_4, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

- Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud $F = \{q_2\}$.
- Popište jazyk akceptovaný automatem s původním F , tj. $F = \{q_2, q_4\}$.

8.3 Konstruuje ZA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

- $L = \{a^i b^j \mid i \neq j, i, j \geq 0\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; w = w^R\}$
- $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{a^{3n+2} b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$
- $L = \{a^k b^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$
- $L = \{a^{n+m} b^{m+p} c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$
- $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^k b^k c^m \mid k, m \geq 1\}$
- $L = \{a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_r} \mid r > 1, k_i \geq 1 (i = 1, \dots, r; \text{existuje } p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

8.4 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$ akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} \\ \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

8.5 Daný ZA $A = (\{q\}, \{(\cdot)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned}\delta(q, (\cdot), Z) &= \{(q, L)\} \\ \delta(q, (\cdot), L) &= \{(q, LL)\} \\ \delta(q, (\cdot), L) &= \{(q, \varepsilon)\}\end{aligned}$$

8.6 Pro danou G navrhnete (rozšířený) ZA, který provádí syntaktickou analýzu:

- a) shora dolů,
- b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova *abababaa*.

$$\begin{aligned}G &= (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde} \\ P &= \left\{ \begin{array}{l|l} S \rightarrow \varepsilon & abSA, \\ A \rightarrow AaB & aB \quad | \quad a, \\ B \rightarrow aSS & bA \end{array} \right\}\end{aligned}$$

8.7 Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převedte na standardní zásobníkový automat.

8.8 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, A) &= \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) &= \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) &= \{(q_0, A)\}\end{aligned}$$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.1 O každé z následujících implikací rozhodněte zda je pravdivá

- a) L_1, L_2 bezkontextové $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ je kontextový
- b) L_1 bezkontextový $\wedge L_1 \cap L_2$ není bezkontextový $\Rightarrow L_2$ není bezkontextový
- c) L_1 regulární $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co - (L_1 \cap L_2)$ bezkontextový
- d) L_1 konečný $\wedge L_2$ bezkontextový $\Rightarrow co - (L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

9.2 Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$R = L((a^*b^+a)^* + a^*)$$

Navrhněte ZA pro jazyk $L \cap R$

$$\begin{array}{lll} \delta_L(q_0, x, Z) = \{(q_0, xZ)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, a) = p_0 \\ \delta_L(q_0, x, y) = \{(q_0, xy)\} & \forall x, y \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, b) = p_1 \\ \delta_L(q_0, \varepsilon, x) = \{(q_1, x)\} & \forall x \in \{a, b, Z\} & \delta_R(p_1, b) = p_1 \\ \delta_L(q_1, x, x) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_1, a) = p_0 \\ \delta_L(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\} & & \\ F_L = \{q_2\} & & F_R = \{p_0\} \end{array}$$

9.3 Je dána bezkontextová gramatika

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \{ S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \}$$

- a) Má tato gramatika vlastnost sebevložení?
- b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevložení?
- c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?
- d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevložení a regularitou?

9.4 Je dán bezkontextový jazyk $L, L \subseteq \{a, b\}^*$

Zkonstruujeme nový jazyk L_1 takto:

a) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; xy \in L\}$

b) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; yx \in L\}$

Dokažte, že L_1 je taky bezkontextový.

Konstrukce Turingových strojů

10.1 Navrhněte deterministický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

10.2 Navrhněte deterministický jednopáskový TS se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ a takový, že výpočty na slovech tvaru 0^*1^* jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

10.3 Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásy) TS pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

10.4 Navrhněte TS (determ. nebo nedeterm.) TS pro jazyk:

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$

b) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

c) $L = \{a^p \mid p \text{ není prvočíslo}\}$

d) $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis čísla } n\}$

Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.1 Objasněte rozdíl mezi pojmy TS akceptuje a TS rozhoduje.

11.2 Je daný DTS T (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhnete k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{aligned}\delta(q, \triangleright) &= (q, \triangleright, R) & \delta(q, a) &= (p, A, R) \\ \delta(p, b) &= (q, a, L) & \delta(q, \sqcup) &= (p, A, R) \\ \delta(p, \sqcup) &= (q, a, L) & \delta(q, a) &= (q_{accept}, A, R)\end{aligned}$$

Kde \triangleright je levá koncová značka, \sqcup označuje prázdné políčko, stavy jsou $\{p, q, q_{accept}\}$, q je počáteční stav, vstupní abeceda je $\{a, b\}$ a pásková abeceda odpovídá množině $\{\triangleright, \sqcup, A, a, b\}$.

11.3 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

- R je regulární, L je rekurzivně spočetný $\Rightarrow R \cap L$ je regulární
- L je rekurzivní $\Rightarrow co-L$ je rekurzivní
- L je rekurzivní $\Rightarrow L^*$ je rekurzivní
- L je kontextový $\Rightarrow co-L$ je rekurzivní
- L není rekurzivní $\Rightarrow co-L$ není rekurzivní
- L není rekurzivní a R je rekurzivní $\Rightarrow L \setminus R$ není rekurzivní
- L není rekurzivní, R je rekurzivní a $R \subseteq L \Rightarrow L \setminus R$ není rekurzivní

11.4 Navrhnete gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n \text{ je mocnina } 2\}$

11.5 Ukažte, že jazyk $L = \{w \mid w \text{ je kód dvojice } (A, v) \text{ takové, že TS } A \text{ zastaví svůj výpočet nad slovem } v\}$ je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

11.6 Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

Redukce

12.1 Rozhodněte, zda platí následující implikace. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- a) $A \leq_m B \Rightarrow co-A \leq_m co-B$
- b) $A \leq_m B$ a B je regulární $\Rightarrow A$ je regulární
- c) A je rekurzivně spočetná a $co-A \leq_m A \Rightarrow A$ je rekurzivní
- d) A je rekurzivně spočetná a $A \leq_m co-A \Rightarrow A$ je rekurzivní
- e) $A \leq_m B$ a A je rekurzivní $\Rightarrow B$ je rekurzivní
- f) A je rekurzivně spočetná $\Rightarrow A \leq_m HALT$

12.2 Je dán jazyk $A = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TS } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný}\}$.
Dokažte, že A není rekurzivní. (Návod: najděte redukci problému zastavení na A)
Je jazyk A rekurzivně spočetný?
Je komplement jazyka A rekurzivně spočetný?

12.3 Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\left\{ \left[\frac{aa}{a} \right], \left[\frac{ab}{abab} \right], \left[\frac{b}{a} \right], \left[\frac{aba}{b} \right] \right\}$$

12.4 Ukažte, že Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný, i když se omezíme na abecedu $\{0, 1\}$.

12.5 Ukažte, že problém ekvivalence dvou Turingových strojů

$$EQ = \{\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \mid \mathcal{M}_1 \text{ a } \mathcal{M}_2 \text{ jsou Turingovy stroje a } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

je nerozhodnutelný.

Složitost

13.1 Rozhodněte, které z následujících vztahů platí. Odpovědi zdůvodněte.

- a) $2n \in \mathcal{O}(n)$
- b) $n^2 \in \mathcal{O}(n)$
- c) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n^2)$
- d) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n)$
- e) $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$
- f) $3n^2 + 4n + 17 \in \mathcal{O}(n^2 - n + 1)$
- g) $(2n)! \in \mathcal{O}(n!^2)$

13.2 Rozhodněte, zda platí následující vztah. Odpověď zdůvodněte.

$$g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \implies f(n) \in o(g(n))$$

13.3 Dokažte, že třída P je uzavřená na operace sjednocení, komplement a zřetězení. Rozhodněte, na které z těchto operací je uzavřena třída NP. Odpověď zdůvodněte.

13.4 Třída coNP je definována jako $\text{coNP} = \{co-L \mid L \in \text{NP}\}$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí. Odpovědi zdůvodněte.

- a) $\text{coNP} = co\text{-NP}$
- b) $L_1, L_2 \in \text{coNP} \implies L_1 \cap L_2 \in \text{coNP}$
- c) $L_1 \in \text{NP}, L_2 \subsetneq L_1, L_2 \in \text{coNP} \implies L_1 \setminus L_2 \in \text{NP}$

13.5 Rozhodněte, zda jsou následující formule splnitelné. U splnitelných formulí popište nějaké splňující přiřazení.

- a) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$
- b) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
- c) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
- d) $(u \vee \neg v \vee \neg w) \wedge (w \vee \neg y \vee z) \wedge (w \vee \neg z \vee x) \wedge (x \vee y \vee z)$
- e) $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

13.6 Dokažte, že následující problémy jsou NP-úplné.

- a) Problém Hamiltonovské cesty v grafu:
 $HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující Hamiltonovskou cestu z } s \text{ do } t\}$
- b) Problém k -kliky (k -klika je úplný podgraf s k vrcholy):
 $CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ je neorientovaný graf s } k\text{-klikou}\}$
- c) Problém podgrafového izomorfismu (Subgraph Isomorphism, SGI):
 $SGI = \{\langle H, G \rangle \mid H = (V, E), G = (U, F) \text{ jsou neorientované grafy takové, že existuje injektivní zobrazení } f : V \rightarrow U \text{ splňující } (u, u') \in E \implies (f(u), f(u')) \in F\}$

13.7 Určete vztahy inkluze/rovnost mezi následujícími dvojicemi složitostních tříd. Svoje tvrzení zdůvodněte.

- a) $\text{TIME}(n^2)$ a $\text{TIME}(n^3)$
- b) $\text{SPACE}(2n^2)$ a $\text{SPACE}(100n^2)$
- c) $\text{SPACE}(n^2)$ a $\text{TIME}(n^2)$
- d) $\text{NSPACE}(n^2)$ a $\text{SPACE}(n^5)$
- e) P a $\text{TIME}(2^n)$

13.8 Zkonstruuje jednopáskový deterministický Turingův stroj, který rozhoduje jazyk $L = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$ v čase $\mathcal{O}(n \log n)$. Není nutné uvádět formální popis stroje.

Zadání cvičení IB005

1. cvičení: Operace nad jazyky

- Připomeňte základní terminologii a definice
- Připomeňte základní operace nad jazyky a přitom cvičte příklady 1.1 a 1.2
- Cvičte 1.3, u 1.3 d) nacvičte "neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem".
- Cvičte 1.4
- Cvičte 1.6
- Cvičte 1.7
- Cvičte 1.8 b) a c) (jednu inkluzi skutečně dokažte)
- Připomeňte pojem gramatiky
- Cvičte 1.9
- Dle zbývajících času, jinak za DÚ, příklady 1.10, 1.11

2. cvičení: Konečné automaty a regulární gramatiky

- K čemu slouží Konečné automaty?
- Na příkladu 2.1 vysvětlíte co jsou a jak fungují konečné automaty
- Uveďte formální definici DFA
- Příklad 2.2a-d,f (!deterministické FA!)
- Příklad 2.2g,h volitelně dle času
- Příklad 2.3a
- Příklad 2.4
- Příklad 2.5
- Příklad 1.11

3. cvičení: Pumping lemma, (Myhill-)Nerodova věta

- Znění a použití Pumping Lemma pro Reg. jazyky
- Příklad 2.6g poctivě
- Příklad 2.6a,b,c zrychleně
- Znění Nerodovy věty a Myhill-Nerodovy věty

- Rozdíl \sim a \sim_L
- Příklad 3.8
- Příklad 3.9
- Příklad 3.10 jednu až dvě odrážky
- Příklad 3.11
- Příklad 3.12

4. cvičení: Minimalizace a kanonizace DFA, nedeterministické FA a determinizace

- Připomeňte si \sim_L .
- Definujte minimální konečný automat.
- Příklad 3.2
- Příklad 3.3
- Definujte nedeterministické FA, a způsob akceptování NFA.
- Příklad 3.4
- Příklad 3.5
- Upozorněte, že pro minimalizaci, je třeba vyjít z deterministického automatu.

5. cvičení: Ekvivalence FA, regulárních gramatik a regulárních výrazů, ε -kroky, Kleeneho věta

- Vysvětlíte princip transformace odstranění ε -kroků
- Příklad 4.7
- Zopakujte vyjadřovací ekvivalenci dosud známých formalismů
- Formulujte podstatu algoritmů pro převod FA na regulární gramatiky a zpět
- Příklad 4.2
- Příklad 4.4
- Připomeňte si definici regulárních výrazů (syntax a sémantika)
- Příklad 4.11
- Princip transformace regulárních výrazů na FA a zpět
- Příklad 4.8 c)
- Příklad 4.10
- Příklad 4.12 a) a diskuze k 4.12 b)

6. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Příklad 5.1
- Příklad 5.2
- Příklad 5.3a – formulujte formální konstrukci synchronního součinu
- Příklad 5.3b-f – slovní argumentace (hint důkazu) proč ano či ne
- Příklad 5.4
- Příklad 5.5
- Příklad 5.6
- Příklad 5.7 – formální konstrukce

7. cvičení: Bezkontextové gramatiky a derivační stromy, redukováná CFG

- Připomeňte CFG a ukažte jak vypadá a jak funguje CFG pro $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Příklad 6.1
- Příklad 6.2
- Příklad 6.3
- Příklad 6.4
- Příklad 6.5
- Příklad 6.6
- Příklad 6.8
- Příklad 6.9
- Příklad 6.10
- Příklad 6.11 (dle času)
- Příklad 6.7 rozmyslet za DÚ

8. cvičení: Normální formy CFG

- Připomeňte princip ostraňování ε -pravidel
- Příklad 7.2
- Připomeňte princip ostraňování jednoduchých pravidel
- Příklad 7.5
- Definujte Chomského NF (CNF) a připomeňte postup převodu CFG do CNF
- Příklad 7.6
- Příklad 7.8b)
- Příklad 7.9
- Vysvětlete odtržení přímé levé rekurze na $A \rightarrow Ab \mid Ac \mid d \mid e$
- Příklad 7.12

9. cvičení: Zásobníkové automaty a syntaktická analýza

- Příklad 8.1 (zadejte přechodovou relaci tabulkou $[q_0Z/a \rightarrow (q_0, AZ)]$)
- Příklad 8.2
- Příklad 8.3b
- Příklad 8.6
- Příklad 8.8
- Diskutujte ekvivalence způsobu akceptování zás. automatů a podstatu převodu
- Zbude-li čas, cvičte příklady 8.4, 8.5 a 8.7

10. cvičení: Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků a pumping lemma pro bezkontextové jazyky

- Příklad 7.15
- Příklad 9.1
- Příklad 9.2 (není nutné konstruovat celou přechodovou funkci)
- Příklad 9.3
- Příklad 9.4 (formální konstrukce)

11. cvičení: Konstrukce Turingových strojů

- Připomeňte jak fungují Turingovy stroje
- Příklad 10.1
- Příklad 10.2
- Příklad 10.3
- Příklad 10.4 – formulujte princip algoritmu pro TS

12. cvičení: Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

- Příklad 11.1
- Diskutujte vztah TS akceptuje/rozhoduje a gramatiky typu 0
- Příklad 11.2
- Příklad 11.3
- Příklad 11.4a
- Příklad 11.4b-d pouze myšlenky fungování CFG
- Příklad 11.5
- Příklad 11.6

13. cvičení: Redukce

Zadání cvičení IB102

1. cvičení: Operace nad jazyky, gramatiky

- Připomeňte pojmy abeceda, jazyk, slovo apod.
- Připomeňte základní operace nad jazyky a přitom cvičte příklady 1.1 a 1.2.
- Příklad 1.3 d) e) f) h). U d) vysvětlete, že neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem.
- Příklad 1.4.
- V sudých skupinách cvičte příklad 1.5, v lichých příklad 1.6.
- Příklad 1.7.
- Příklad 1.8 b). Zdůrazněte, že dva jazyky jsou stejné, právě když platí obě inkluze \subseteq a \supseteq . Jednu inkluzi dokažte.
- Příklad 1.8 c). Pozor, rovnost neplatí.
- Připomeňte pojem gramatiky a cvičte příklad 1.9 a) anebo b).
- Pokud vám zbyde čas, cvičte příklady 1.10 a 1.11.

2. cvičení: Deterministické konečné automaty, pumping lemma

- Příklad 1.11 a) d) (pokud jste nestihli na prvním cvičení).
- Příklad 2.1.
- Příklad 2.2 a) b) c) d). Dejte prosím studentům možnost, aby se pokusili alespoň nějaký automat sestrojít sami. Pozor, automaty musí být deterministické.
- Příklad 2.3 a) b).
- Příklad 2.4.
- Příklad 2.6. Z lehčích příkladů **a)–c)** udělejte jeden pořádně, ostatní zrychleně. Dále udělejte pořádně jeden zajímavější příklad, nejlépe **g)**. Zbyde-li čas, projděte zrychleně i ostatní příklady, zejména **e)**. Upozorněte studenty, že vlastní text důkazu zůstává v podstatě stejný (důkaz lze prezentovat jako formulář, který se vždy na pár místech doplní).

3. cvičení: Myhill-Nerodova věta

- Zopakujte Myhill-Nerovou větu a pojmy, které využívá. Zdůrazněte následující aspekty:
 1. Z DFA lze odvodit pravou kongruenci s konečným indexem takovou, že L je sjednocení nějakých tříd ekvivalence. Zopakujte, jak se to dělá.
 2. Z takové pravé kongruence lze odvodit DFA (samotná kongruence neurčuje koncové stavy, ty určí až L). Zopakujte, jak se to dělá.

3. Pro každý jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ (i neregulární) je \sim_L vždy pravá kongruence a L je sjednocením nějakých tříd rozkladu Σ^* / \sim_L . Má-li \sim_L konečný index, lze sestavit DFA pro L a L je tudíž regulární.
4. \sim_L je nejhrubší ze všech pravých kongruencí \sim takových, že L je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* / \sim .

- Příklad 3.9.
- Příklad 3.12.
- Příklad 3.10. Jednu odrážku udělejte pořádně, ostatní zrychleně.
- Příklad 3.8. Udělejte jednu odrážku. Pak zkuste totéž pro jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^* \cdot \{d\}^*$ a upozorněte, že přestože index \sim_L je 5, existuje pro L deterministický FA se čtyřmi stavy. Problém je v tom, že tento automat není totální a tudíž není minimální.
- Příklad 3.13.

4. cvičení: Minimalizace a kanonizace konečných automatů, nedeterministické automaty, determinizace, odstranění ε -kroků

- Zdůrazněte, že před vlastní minimalizací se z automatu odstraní nedosažitelné stavy a automat se ztotální.
- Příklad 3.2 b).
- Příklad 3.1 a).
- Příklad 3.3.
- Zopakujte nedeterministické FA.
- Příklad 3.4. Počet odrážek podle potřeby, zbytek můžete dodělat na konci hodiny, pokud zbyde čas.
- Zopakovat determinizaci.
- Příklad 3.5 a) nebo b).
- Zopakovat odstranění ε -kroků.
- Příklad 4.5. Příklad řešte pomocí tabulkového zápisu. Máte-li čas, můžete nejdřív ukázat, jak snadno se v tom udělá chyba, když se to dělá přímo na grafu.
- Budete-li mít pocit, že příklad 4.5 nestačil, pokračujte příkladem 4.7.

5. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Příklad 5.1.
- Příklad 5.2.
- Příklad 5.3.
- Příklad 5.4.
- Příklad 5.5.
- Příklad 5.6.
- Příklad 5.8.
- Příklad 4.12 a). Zbyde-li čas, řešte i b). Nechcete-li u části b) prezentovat plnohodnotné řešení (je trochu náročnější), můžete řešit zjednodušenou verzi, kde se přijme omezení, že \cap a \cup lze aplikovat jen na jazyky nad stejnou abecedou. Pak se snadno ukáže, že M_2 je třída všech konečných jazyků a jejich doplňků. Upozorněte, že bez toho omezení to ale neplatí, uveďte příklad.

6. cvičení: Ekvivalence FA, regulárních gramatik a regulárních výrazů

- Příklad 4.8. Stačí 2 odrážky.
- Příklad 4.9.
- Příklad 4.10.
- Příklad 4.11.
- Příklad 4.2.
- Příklad 4.4.
- Alespoň sem byste měli určitě dojít. Zkuste zvládnout ještě tyto příklady na bezkontextové jazyky.
- Příklad 6.11 a).
- Příklad 6.1. U druhé gramatiky neztrácejte moc času, příklad slouží jen jako demonstrace popisné síly bezkontextových gramatik.
- Zbyde-li čas, dělejte další odrážky z příkladu 6.11.

7. cvičení: Bezkontextové gramatiky, derivační stromy, transformace

- Příklad 6.2.
- Příklad 6.3.
- Příklad 6.5.
- Příklad 6.6. Není třeba formálně dokazovat, že je navržená gramatika jednoznačná. Slovní argumentace postačí.
- Příklad 6.7. Stačí identifikovat problém.
- Příklad 6.8.
- Příklad 6.9.
- Příklad 7.2.
- Zbyde-li čas, dělejte dosud nprocvičené části příkladu 6.11.

8. cvičení: CNF, odstranění levé rekurze, pumping lemma pro bezkontextové jazyky

- Příklad 7.5.
- Příklad 7.6.
- Příklad 7.8.
- Příklad 7.12. Cvičte pouze odstranění levé rekurze (transformaci do GNF v IB102 neučíme). Pokud by jeden příklad nestačil, udělejte ještě příklad 7.13 nebo 7.10.
- Příklad 7.15. Jednu odrážku udělejte pečlivě, v dalších se soustředte jen na to podstatné.

9. cvičení: Zásobníkové automaty, nedeterministická syntaktická analýza, uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

- Příklad 8.1. Zmiňte prosím, že byl definován pojem *krok výpočtu*, ale pojem *výpočet* pro PDA definován nebyl. Lze si představit hned několik definic, které kromě zjevných požadavků splňují i tyto:
 1. Musí se přečíst celý vstup. V tom případě by v příkladu existoval jen 1 výpočet.
 2. Musí se číst “dokud to lze”. V tomto případě existují 4 výpočty.
 3. Stačí přečíst libovolnou část vstupu. V tom případě je výpočtů hodně.
- Příklad 8.3. Udělejte pořádně aspoň dvě odrážky včetně c).
- Příklad 8.6.
- Příklad 9.1.
- Příklad 9.3.
- Zbude-li čas, cvičte další odrážky z příkladu 8.3.

10. cvičení: Konstrukce TM, frázové gramatiky, uzávěrové vlastnosti rekursivních a rekursivně spočetných jazyků

- Ukažte, že jazyk $co-\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ nad abecedou $\{a, b\}$ je bezkontextový.
- Příklad 10.1.
- Příklad 10.2.
- Příklad 10.4 b). Konstrukci ostatních strojů zformulujte jen neformálně.
- Příklad 11.3 a) d) e) f) g).
- Příklad 11.4. Není nutné vyřešit celý příklad. Co stihnete, to stihnete.

11. cvičení: Redukce a rozhodnutelnost problémů.

- Příklad 12.1.
- Příklad 12.2.
- S využitím příkladu 12.3 připomeňte definici Postova korespondenčního problému.
- Příklad 12.4.
- Zbude-li čas, udělejte i příklad 12.5.

12. cvičení: Složitost

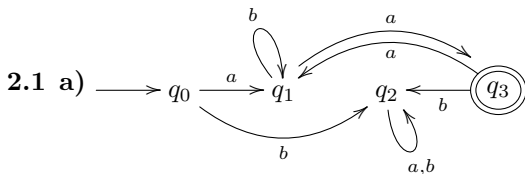
- Příklad 13.1.
- Příklad 13.3.
- Příklad 13.4.
- Zopakujte pojem *konjunktivní normální forma (cnf-forma)* formulí, pojem *3cnf-forma* a problém *3SAT*. Ke zopakování můžete využít část příkladu 13.5.
- Příklad 13.6 b) c).
- Příklad 13.7.
- Zbude-li čas, udělejte i příklady 13.6 a), 13.2 a 13.8.

Řešení některých příkladů

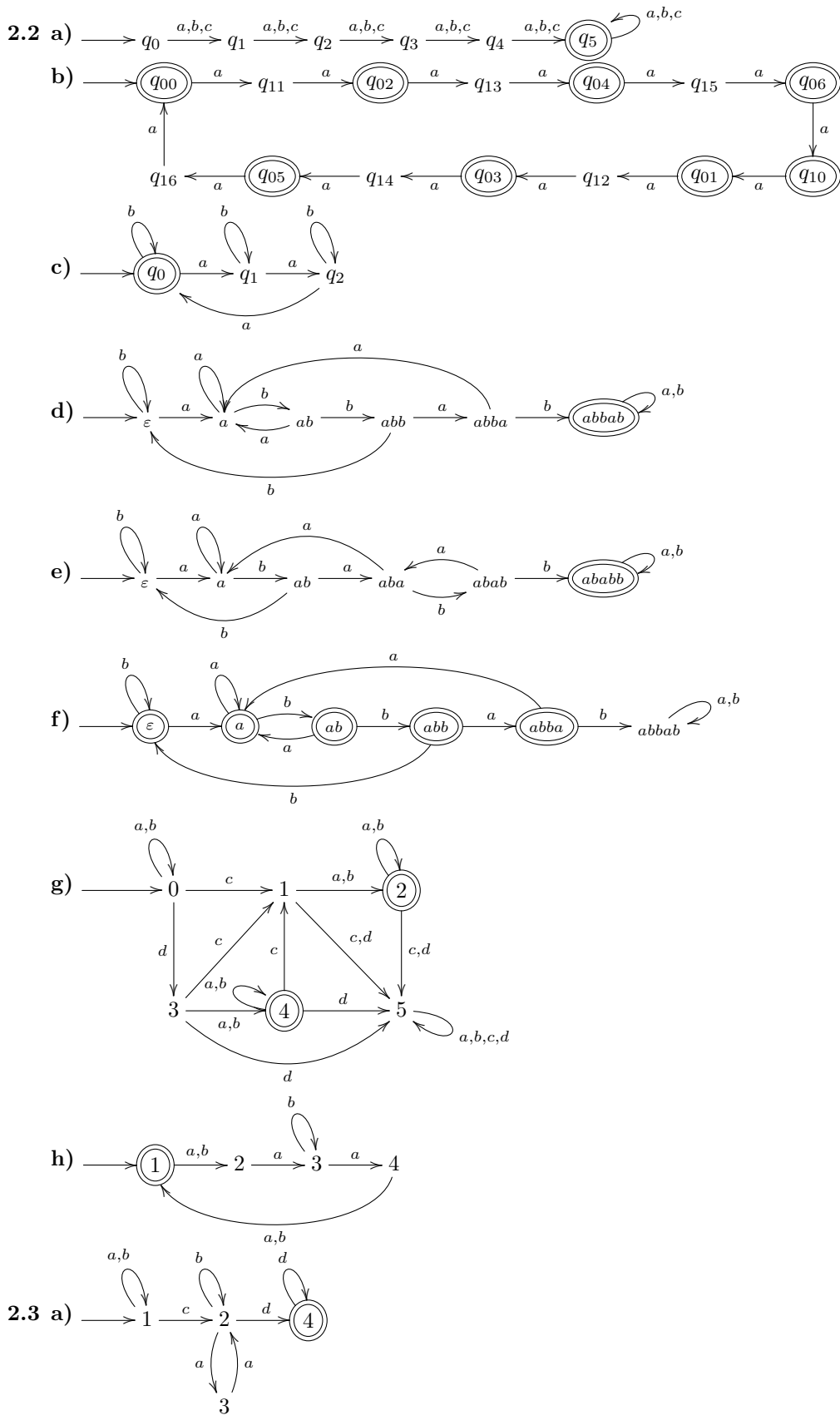
Formální jazyky, regulární gramatiky

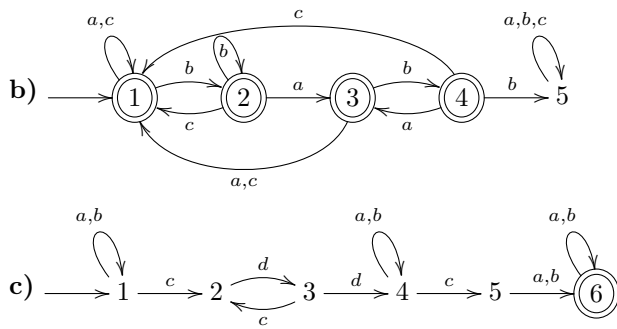
- 1.1 a)** $\{xy, y, yx, z\}$ **b)** $\{y\}$ **c)** $\{xyy, xyz, yy, yz, yxy, yxz\}, \{yxy, yy, yyy, zxy, zy, zyx\}$
d) $\{\varepsilon\}, \{y, z\}, \{yy, yz, zy, zz\}, \{yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \dots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z včetně ε ,
 $\{y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \dots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z kromě ε
e) $\{x, y, z\}^* \setminus \{y, z\}$ tj. libovolné slovo složené z písmenek x, y a z včetně ε , kromě slov y a z
- 1.2 a)** $\{\varepsilon\}, \emptyset, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}$ **b)** $\{\varepsilon\}, \emptyset, \emptyset, \{\varepsilon\}$ pokud $\varepsilon \in L$ jinak \emptyset **c)** $\emptyset, \emptyset, \{\varepsilon\}, L$
- 1.3 a)** $\{a, aa, ba, abc, \varepsilon\}$ **b)** $\{a, ba\}$ **c)** $\{aba, aabc, aa, a, aaba, aaabc, aaa, baba, baabc, baa, ba\}$ **d)** ne, protipříklad baa **e)** jedno slovo z množiny $\{a, aa, ba, aba, aaa, baba, baa\}$ **f)** ano, protože $\varepsilon \in L_2$; ne, protipříklad $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$; pro pokročilé: implikace " \implies " platí, implikace " \impliedby " platí pouze v upravené podobě $\varepsilon \in L_2 \iff (L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset)$ **g)** ano, ano, ne **h)** všechna slova nad danou abecedou, kromě slov z jazyka L_2 , formálně: $\{a, b, c, d\}^* \setminus L_2$
- 1.4 a)** Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa, bb\}$, $i = 2$, $L^i = \{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\}$, $\{w^i \mid w \in L\} = \{aaaa, bbbb\}$
b) Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa\}$, $L^2 = \{aaaa\}$, ale $|aaaa| \neq 4$ **c)** $L = \{a\}$
- 1.5** $L_1 = L_4 = L_5 > L_2, L_1 = L_4 = L_5 > L_3, L_1 = L_4 = L_5 > L_6$, neporovnatelné: L_2, L_3, L_6
 L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
 L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, tvaru $xyzyxyzyxyzyxyz\dots$
 L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
 L_4 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
 L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x, y\}^* \cup \{z\}^*$
 L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x
- 1.6** $L_1 = L_5 > L_2 > L_6, L_1 = L_5 > L_3 > L_4, L_2 > L_4$, neporovnatelné: L_2 a L_3, L_6 a L_3, L_6 a L_4
 L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
 L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, kromě ε
 L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
 L_4 – ty slova z L_3 , která mají právě 2 výskyty y
 L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
 L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x
- 1.7 a)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **b)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*$ **c)** $L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **d)** $L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cup L_2 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ a pokud naznáme, že ε také začíná a končí stejným znakem, je třeba k řešení přidat $\cup (L_1^* \cap L_2^*)$ **e)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **f)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^* \cap L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **g)** $((L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*)^C$
- 1.8 a)** ne, $L - 1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **b)** ano, nutno dokázat obě inkluze \subseteq a \supseteq **c)** ne, $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{ab\}$ a $L_3 = \{b, \varepsilon\}$ **d)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **e)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **f)** ano, nutno dokázat obě inkluze \subseteq a \supseteq **g)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$
- 1.9 a)** $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, typu 0 **b)** $\{b, c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b, c\}^+$, typu 3 (regulární)
- 1.10** $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 2j; j, k \in \mathbb{N}_0\}$, dolní indexy u navržených terminálů představují zbytek po dělení počtu 'a' (resp. 'b') dvěma

Deterministické konečné automaty, pumping lemma



- b)** $L = \{a\} \cdot \{b, aa\}^* \cdot \{a\}$ **c)** $L = (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{aa\})^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cup \{ab\} \cdot \{a, b\}^*)) \cup \{b\} \cdot \{a, b\}^*$

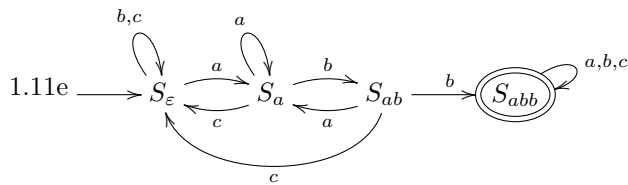
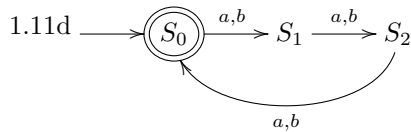
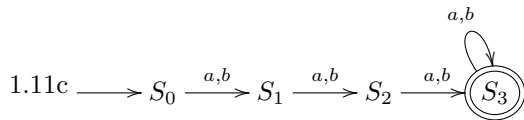
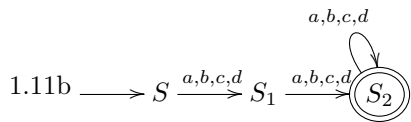
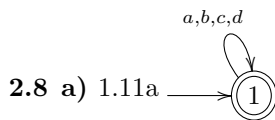




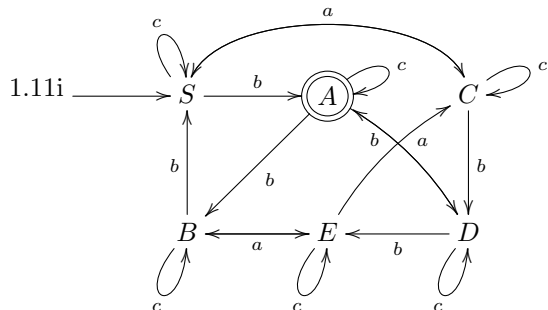
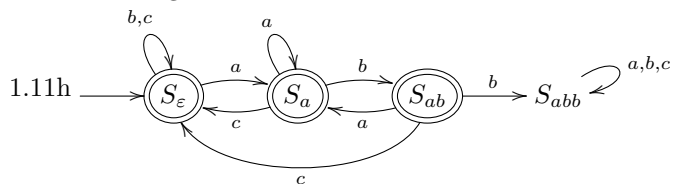
2.4 $L = \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot (\{c\} \cdot \{d\})^* \cup \{b\}$

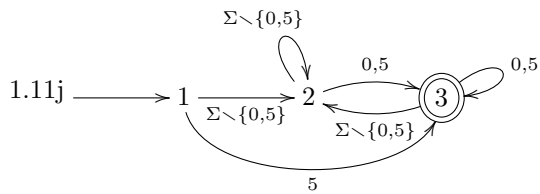
2.5 $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge w = u.v \Rightarrow |\#_a(u) - \#_b(u)| \leq 3\}$

2.6 U příkladu e) je třeba volit slovo $a^n b^{n!+n}$.



1.11f Není regulární.





Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

3.1 a)

| | a | b |
|-----|---|---|
| → A | B | C |
| B | D | B |
| C | C | D |
| ← D | C | B |

b)

| | a | b |
|-----|---|---|
| ↔ A | B | C |
| B | B | C |
| C | C | D |
| ← D | D | C |

3.2 a)

| | a | b |
|-----|---|---|
| → A | B | C |
| B | C | A |
| C | C | D |
| D | C | E |
| ← E | F | E |
| F | D | F |

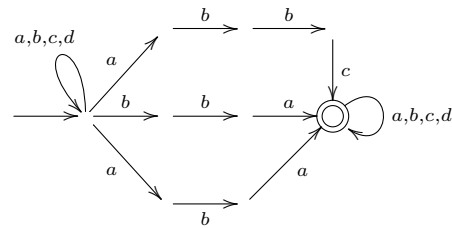
b)

| | a | b |
|-----|---|---|
| → A | B | C |
| B | D | B |
| ← C | B | C |
| ← D | E | B |
| E | F | C |
| F | F | F |

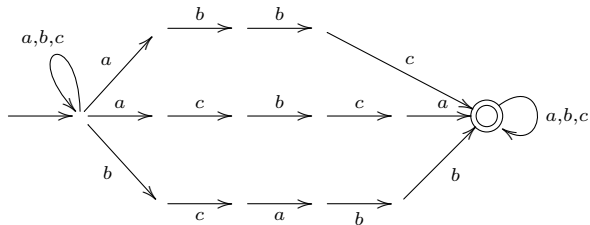
Výsledné automaty v obou případech nejsou ekvivalentní automatům uvedeným v zadání vpravo.

3.3 Není.

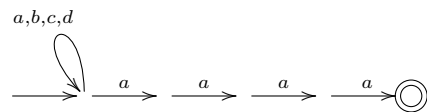
3.4 a)



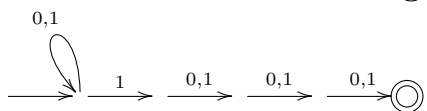
b)



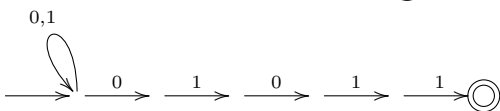
c)

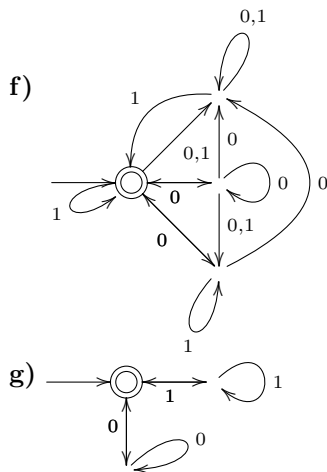


d)



e)





3.5 a)

| | | a | b | c |
|---|--------|-------|-------|--------|
| → | [1] | [23] | [34] | [1] |
| ← | [23] | [123] | [14] | [234] |
| | [34] | [123] | [1] | [34] |
| ← | [123] | [123] | [134] | [1234] |
| | [14] | [123] | [134] | [134] |
| ← | [234] | [123] | [14] | [234] |
| | [134] | [123] | [134] | [134] |
| ← | [1234] | [123] | [134] | [1234] |

b)

| | | a | b | c |
|---|-------|-------|-------|------|
| → | [1] | [12] | [1] | [1] |
| ← | [12] | [12] | [13] | [1] |
| | [13] | [12] | [1] | [14] |
| | [14] | [125] | [1] | [1] |
| ← | [125] | [12] | [136] | [1] |
| | [136] | [127] | [1] | [14] |
| ← | [127] | [12] | [13] | [1] |

3.6 $(\{a, b\} \cdot \{b\} \cdot \{b\}^+ \{a\} \cdot \{b, ab\} \cdot \{a\})^* \{a, b\} \cdot \{b\}^+$

3.7

| | {x} | {x, y} |
|---------|-----|--------|
| 1 stav | 2 | 2 |
| 2 stavy | 4 | 28 |

3.8 a) Předpokládejme, že takový automat existuje. Pak ze slov a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 musejí dvě nutně padnout do stejné třídy rozkladu Σ^* / \sim_L . Označme je a^i, a^j ($i \neq j$) a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $i < j$. Pak platí

$$a^i \cdot a^{4-j} = a^{4+i-j} \in L$$

$$a^j \cdot a^{4-j} = a^4 \notin L,$$

a tedy $a^i \not\sim_L a^j \Rightarrow |\sim_L| \geq 5$.

b) Analogicky jako v a).

3.10 a) Důkaz sporem. Předpokládejme, že L je regulární. Pak prefixová ekvivalence \sim_L má konečný index, označme jej n . Pak ovšem ze slov $a, a^2, a^4, \dots, a^{2^n}$ nutně musí některá dvě slova padnout do stejné třídy rozkladu, označme je a^k, a^l ($k \neq l$). Po přiřetění slova a^k dostáváme slovo $a^k a^k \in L$ a slovo $a^l a^k \notin L$. Tím je dosažen spor s předpokladem a L není regulární.

b) $\varepsilon, a, a^2, \dots, a^n$ z čehož a^k, a^l (BÚNO $k < l$), která $a^k b^k \in L, a^l b^k \notin L$

c) $abb, a^2bb, \dots, a^{n+1}bb$ z čehož $a^k bb, a^l bb$ ($k \neq l$), která $a^k bba^k \in L, a^l bba^k \notin L$

3.11 Definujeme binární relaci \sim takto: $u \sim v \Leftrightarrow \#_a(w) \equiv \#_b(w) \pmod{3}$

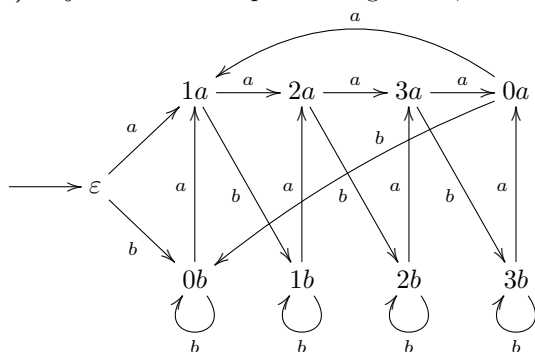
\sim je ekvivalence, \sim je pravá kongruence, $|\sim| = 3$, tedy má konečný index, $L = \{w \mid \#_a(w) \pmod{3} = 0\}$

3.12 a) 4 b) nemá konečný index

3.13 a) \sim je ekvivalence i pravá kongruence, index je 4. L může být libovolný jazyk, jehož minimální automat odpovídá přímo relaci \sim . Takových jazyků je 12, což je vidět po nakreslení automatu (bez akceptujících stavů) podle \sim a zvažení, pro které označí koncových stavů je automat minimální. Jazyky L' jsou právě ty, které lze popsat stejným automatem, ale s takovou množinou koncových stavů, při které automat není minimální. Např. $L' = \{a, b\}^*$.

b) \sim není ekvivalence (není tranzitivní).

c) \sim je ekvivalence i pravá kongruence, index je 9. Lze podle ní sestavit tento automat:



Je vidět, že automat nebude při žádném označení koncových stavů minimální: stavy $\varepsilon, 0a, 0b$ mají stejné přechody a vždy budou alespoň dva z nich označeny jako akceptující nebo neakceptující a tudíž ty dva stavy budou jazykově ekvivalentní. Naopak L' může být jakýkoliv jazyk rozpoznávaný uvedeným automatem s libovolným označením koncových stavů. Takových jazyků L' je tedy celkem 2^9 .

Regulární gramatiky a výrazy \Leftrightarrow FA, ε -kroky, Kleeneho věta

4.1

| | | | |
|---------------------------|------------------------|--------------------|--------------------|
| | a | b | c |
| $\leftrightarrow \bar{S}$ | $\{\bar{A}, q_f\}$ | $\{\bar{C}\}$ | \emptyset |
| \bar{A} | $\{\bar{A}\}$ | $\{\bar{B}, q_f\}$ | $\{q_f\}$ |
| \bar{B} | $\{\bar{B}, \bar{C}\}$ | $\{\bar{C}\}$ | $\{\bar{A}, q_f\}$ |
| \bar{C} | $\{\bar{A}, q_f\}$ | $\{\bar{B}, q_f\}$ | \emptyset |
| $\leftarrow q_f$ | \emptyset | \emptyset | \emptyset |

4.2

| | | | |
|-----------------------|---------------|------------------------|---------------|
| | a | b | c |
| $\rightarrow \bar{S}$ | $\{\bar{X}\}$ | $\{\bar{Y}\}$ | $\{q_f\}$ |
| \bar{X} | \emptyset | $\{\bar{S}, \bar{X}\}$ | \emptyset |
| \bar{Y} | \emptyset | $\{\bar{S}\}$ | $\{\bar{Z}\}$ |
| \bar{Z} | $\{\bar{S}\}$ | $\{q_f\}$ | $\{q_f\}$ |
| $\leftarrow q_f$ | \emptyset | \emptyset | \emptyset |

4.11 a) $(a+b)^*ab$ b) $b^*(ab^*ab^*)^*$ c) $a(a+b)^*a + b(a+b)^*b + a + b$ (pokud ε také začíná a končí na stejným symbolem, přičteme ještě ε) d) $((a+b)(a+b))^*$

4.12 a) M_1 je třída všech konečných jazyků.

b) Necht' Σ_1 je nějaká abeceda. Pak $C(\Sigma_1)$ definujeme jako množinu všech slov, kde se každé písmeno z abecedy vyskytuje aspoň jednou, tj.

$$C(\Sigma') = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall a \in \Sigma_1 : \#_a(w) > 0\}.$$

Pak M_2 je třída všech jazyků L takových, že pro všechny Σ_1 , které jsou podmnožinou abecedy jazyka L , platí: $L \cap C(\Sigma_1)$ je konečný nebo $C(\Sigma_1) \setminus L$ je konečný.

Poměrně snadno se ukáže, že M_2 všechny takové jazyky musí obsahovat a že je tato třída zároveň uzavřená na sjednocení, průnik a komplement.

c) M_3 je třída všech konečných jazyků.

Uzávěrové vlastnosti \mathcal{R}

5.1 Neplatí. Jazyky $L_i = \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$ jsou konečné a tudíž regulární, ale $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární.

5.2 $L_i = \{a, b\}^* \setminus \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$. Pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \{a, b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n > 0\}$, což není regulární jazyk, protože $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární jazyk a regulární jazyky jsou uzavřené na doplněk.

5.3 Neregulární jazyky jsou uzavřené na komplement. U všech ostatních operací lze najít jazyky takové, že výsledkem je neregulární jazyk, i takové, že výsledek je regulární. Necht' $R = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ je jazyk nad $\Sigma = \{a, b\}$. R jistě není regulární.

| operace | regulární výsledek | neregulární výsledek |
|---------------------|--|------------------------|
| $L_1 \cap L_2$ | $R \cap co-R = \emptyset$ | $R \cap R = R$ |
| $L_1 \cup L_2$ | $R \cup co-R = \Sigma^*$ | $R \cup R = R$ |
| $L_1 \setminus L_2$ | $R \setminus R = \emptyset$ | $R \setminus co-R = R$ |
| $L_1 \cdot L_2$ | $(R \cup \{\varepsilon\}) \cdot co-R = \Sigma^*$ | $R \cdot R$ |
| L_1^* | $(co-R)^* = \Sigma^*$ | R^* |

5.4 Platí.

5.5 Ani jedna implikace neplatí.

5.6 Stačí zvolit L_1 jako libovolný neregulární jazyk a L_2 jako doplněk L_1 .

Bezkontextové gramatiky

6.1 a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ b) Jazyk se nedá moc rozumně popsat.

6.4 Ano. (Právě všechny reg. jazyky.)

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.9 Minimální i maximální délka odvození je $2n - 1$.

Zásobníkové automaty

8.2 a) $\{a^i b^j \mid i > j > 0\}$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.3 a) ano b) ne c) ano d) třída bezkontextových jazyků bez vlastnosti sebevlození se rovná třídě regulárních jazyků

Konstrukce Turingových strojů

10.2 Návod: TS bude donekonečna číst vstupní pásku a posouvat se vpravo, nebo bude ve dvou krocích opakovaně posouvat hlavu vlevo a vpravo.

Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.3 a) Neplatí. Stačí vzít libovolný neregulární rekurzivně spočetný L na abecedou Σ a $R = \Sigma^*$. b) Platí (viz. skripta). c) Platí (viz. skripta). d) Platí. e) Platí. f) Neplatí. Stačí vzít $R \supseteq L$. g) Platí. Plyne z uzavřenosti rekurzivních jazyků na sjednocení.

11.6 $L = \{w \mid w \text{ je kód dvojice } (A, v) \text{ takové, že TS } A \text{ nezastaví svůj výpočet nad slovem } v\}$

Redukce

12.1 a) Platí (přímo z definičního vztahu). b) Neplatí. $A = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$, $B = \{0\}$, $f(x) = 0$ pokud x je tvaru ww , $f(x) = 1$ jinak. c) Platí. d) Platí (připomeňme, že $A \leq_m B$ implikuje $co-A \leq_m co-B$). e) Neplatí. $A = \emptyset$, B je problém zastavení. $f(x) = y$, kde y je libovolné slovo nad $\{0, 1, \#\}$, které neleží v B . f) Platí. $f(w) = \langle M', w \rangle$, kde M' je TM akceptující A takový, že místo do zamítajícího stavu začne cyklit. Tedy M' akceptuje w právě když zastaví. Funkce $f(w) = \langle M, w \rangle$, kde M je libovolný zvolený TM akceptující A naopak redukcí být nemusí (např. pokud je A rekurzivní a M je úplný).

12.2 A není rekurzivní, protože na něj lze redukovat problém zastavení. A je rekurzivně spočetný (lze ukázat přímo nebo redukcí na problém akceptování). $co-A$ není rekurzivně spočetný (A by pak byl rekurzivní).

12.3 Řešením je posloupnost 2, 2, 4, 3, 3, 1, 1.

12.4 Lze ukázat redukci běžného PCP na problém ze zadání.

12.5 Lze ukázat redukci z problému neprázdnosti jazyka popsaného Turingovým strojem.

Složitost

13.1 Postupujeme podle definice \mathcal{O} . Bud' najdeme konstanty n_0 a c tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí definiční nerovnost, nebo ukážeme (většinou sporem), že takové konstanty neexistují. **a)** Volíme například $n_0 = 1$, $c = 3$. Pro všechna $n \geq n_0$ platí $2n \leq 3n = cn$ a proto $2n \in \mathcal{O}(n)$. **b)** Předpokládejme, že existují n_0 a c takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $n^2 \leq cn$. Položme $m = \max\{c, n_0\} + 1$. Zjevně $m \geq n_0$, ale $m^2 > cm$. To je spor a proto $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$. **c)** Platí. **d)** Neplatí. **e)** Nejprve připomeňme definici. Píšeme $f(n) \in 2^{\mathcal{O}(g(n))}$, pokud existují $n_0, c \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $f(n) \leq 2^{c \cdot g(n)}$. Analogicky se definuje i význam dalších aritmetických výrazů obsahujících $\mathcal{O}(g(n))$, jako například $2^{2^{\mathcal{O}(g(n))}}$.

Vztah $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$ samozřejmě platí. Stačí zvolit $n_0 = 1$ a $c = 2$. **f)** Platí. Stačí zvolit $c = 4$ a dopočítat dostatečně velké n_0 . **g)** Neplatí. V důkazu sporem stačí zvolit $m = \max\{1, c, n_0\}$.

13.2 Tento vztah obecně neplatí. Protipříkladem jsou například funkce $f(n) = 1$ a

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ n & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zjevně $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$, protože funkce g není shora omezená a tudíž pro každé $n_0, c \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ splňující $g(n) > c \cdot f(n) = c$. Vztah $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ ovšem neplatí, protože funkce $\frac{f(n)}{g(n)}$ nemá pro n jdoucí do nekonečna limitu.

13.3 Nechť M_A, M_B jsou jednopáskové deterministické Turingovy stroje pracující s časovou složitostí $\mathcal{O}(p_A), \mathcal{O}(p_B)$ (kde p_A a p_B jsou polynomy), které akceptují jazyky A, B . Nejprve ukážeme, že třída P je uzavřená na všechny tři operace.

Popíšeme dvoupáskový deterministický Turingův stroj M akceptující jazyk $A \cup B$. Stroj M pro vstup x nejprve zkopíruje vstup na druhou pásku (v čase $\mathcal{O}(n)$), pak na druhé pásce simuluje výpočet stroje M_A . Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje M_A , pak i stroj M akceptuje. V opačném případě stroj M simuluje na první pásce výpočet stroje M_B . Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje M_B , pak i stroj M akceptuje, jinak zamítá. Je zřejmé, že stroj M akceptuje jazyk $A \cup B$ a že pracuje v čase $\mathcal{O}(n + p_A(n) + p_B(n))$, tedy v polynomiálním čase.

Stroj akceptující komplement jazyka A získáme ze stroje M_A záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu. Takto získaný stroj pracuje se stejnou časovou složitostí jako M_A .

Popíšeme třípáskový Turingův stroj M akceptující jazyk $A.B$. Stroj postupně zkouší rozdělit vstupní slovo $x = x_1x_2 \dots x_n$ na všechny možné dvojice podslov (nejprve ε a x , pak x_1 a $x_2 \dots x_n$, pak x_1x_2 a $x_3 \dots x_n, \dots$, nakonec x a ε). První podslovo vždy zkopíruje na druhou pásku a simuluje na něm výpočet stroje M_A . Druhé podslovo zkopíruje na třetí pásku a simuluje na něm výpočet stroje M_B . Pokud obě simulace dospějí do akceptujících stavů, stroj M akceptuje. V opačné situaci postup opakujeme pro další dvojici podslov. Pokud už byly vyzkoušeny všechny dvojice, stroj M zamítne. Stroj M pracuje v čase $\mathcal{O}(n \cdot (n + p_A(n) + p_B(n)))$, tedy v polynomiálním čase.

Třída NP je uzavřená na sjednocení i na zřetězení. V obou případech lze použít stejnou argumentaci jako u třídy P . V případě zřetězení lze algoritmus stroje M vylepšit tak, že neprochází všechny dvojice podslov, ale nedeterministicky uhodne správné rozdělení na podslova.

Uzavřenost třídy NP na komplement je otevřený problém (známý jako $NP = \text{coNP}?$). Výše uvedená argumentace pro P v tomto případě nefunguje: záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu u nedeterministického stroje získáme stroj, který akceptuje slovo w pokud existuje zamítající výpočet původního stroje nad tímto slovem. Žádoucí by ovšem bylo, aby zkonstruovaný stroj akceptoval slovo w pokud jsou všechny výpočty původního stroje nad tímto slovem zamítající.

13.4 **a)** Neplatí. Stačí uvážit libovolný jazyk $L \in P \subseteq NP$. Jelikož třída P je uzavřená na doplněk, tak i $\text{co}-L \in P \subseteq NP$. Tedy $\text{co}-L \notin \text{co}-NP$, ale přitom $\text{co}-L \in \text{coNP}$. **b)** Platí. Jelikož $\text{co}-L_1, \text{co}-L_2 \in NP$ a NP je uzavřená na sjednocení, tak $\text{co}-L_1 \cup \text{co}-L_2 \in NP$. Tedy $L_1 \cap L_2 \in \text{coNP}$. **c)** Platí. Jelikož $\text{co}-L_2 \in NP$ a NP je uzavřená na průnik (lze lehce dokázat), tak $L_1 \cap \text{co}-L_2 = L_1 \setminus L_2 \in NP$.

13.6 Příslušnost do NP lze dokázat snadno. NP-těžkost lze dokázat redukcí: **a)** z problému $3SAT$ (viz Sipser: Theorem 7.35 v 1. vydání, Theorem 7.46 ve 3. vydání) **b)** z problému $3SAT$ (viz Sipser: Theorem 7.26 v 1. vydání, Theorem 7.32 ve 3. vydání) **c)** z problému $CLIQUE$. pro danou instanci $\langle G, k \rangle$ problému $CLIQUE$ lze v polynomiálním čase vytvořit dvojici $\langle H_k, G \rangle$, kde H_k je úplný graf s k vrcholy. Je zřejmé, že $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$ právě tehdy, když $\langle H_k, G \rangle \in SGI$.

Abychom se ujistili, že redukce $CLIQUE \leq_p SGI$ je polynomiální i při binárním zakódování k , můžeme ji vylepšit tak, že nejprve ověříme, zda graf G má alespoň k vrcholů. V případě kladné odpovědi pokračujeme jako v předchozím případě (dvojici $\langle H_k, G \rangle$ lze jistě zkonstruovat v čase kvadratickém vzhledem k počtu vrcholů grafu G). V opačném případě jistě platí, že $\langle G, k \rangle \notin CLIQUE$ a tudíž stačí vygenerovat libovolnou dvojici grafů, která nepatří do SGI (například $\langle H, G' \rangle$, kde H je graf s jedním vrcholem v a hranou (v, v) a G' je graf s jedním vrcholem, ale bez hrany).

13.7 **a)** $TIME(n^2) \subseteq TIME(n^3)$ (ve skutečnosti lze dokázat i $TIME(n^2) \subsetneq TIME(n^3)$) **b)** $SPACE(2n^2) = SPACE(100n^2)$ **c)** $SPACE(n^2) \supseteq TIME(n^2)$ **d)** $NSPACE(n^2) \subseteq SPACE(n^5)$ (ve skutečnosti lze dokázat i $NSPACE(n^2) \subsetneq SPACE(n^5)$) **e)** $P \subseteq TIME(2^n)$, protože $n^k \in \mathcal{O}(2^n)$ pro každé k

13.8 viz Sipser, za Definition 7.7.