IB112 Základy matematiky

Řešení soustavy lineárních rovnic, matice, vektory

Jan Strejček

Obsah

Soustava lineárních rovnic

Lineární rovnice

Definice (Lineární rovnice)

Lineární rovnicí o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumíme rovnici tvaru

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou koeficienty a b je absolutní člen.

Příklad

- $x + 3 = 2y - 4 \quad \longrightarrow \quad x - 2y = -7$
- lze chápat i jako rovnici nad 3 neznámými: $x - 2y + 0z = -7$

Soustava lineárních rovnic

Definice (Soustava lineárních rovnic)

Je-li dáno m rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hovoříme o soustavě lineárních rovnic nebo systému lineárních rovnic.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Řešením soustavy rozumíme n-tici čísel $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, po jejichž dosazení za proměnné $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se levá strana každé rovnice vyhodnotí na odpovídající pravou stranu.

Motivační příklad 1

Příklad

$$
\begin{array}{rrrcr}
2x & -3y & & = & 7 \\
x & & +2z & = & 1 \\
3x & +3y & +2z & = & 14
\end{array}
$$

Motivační příklad 1

Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array}$$

Řešení

- Soustava má jediné řešení $(5, 1, -2)$.
- Jinak zapsáno: $x = 5$, $y = 1$, $z = -2$

Motivační příklad 2

Příklad

$$
\begin{array}{rrrcr}
2x & -3y & & = & 7 \\
x & & +2z & = & 1 \\
3x & -3y & +2z & = & 8
\end{array}
$$

Motivační příklad 2

Příklad

$$\begin{array}{rrrcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & -3y & +2z & = & 8 \end{array}$$

Řešení

- Soustava má řešení $(5, 1, -2)$.
- Existují další řešení: $(-1, -3, 1)$, $(2, -1, -\frac{1}{2})$, $(11, 5, -5)$, ...

Motivační příklad 2

Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & -3y & +2z & = & 8 \end{array}$$

Řešení

- Soustava má řešení $(5, 1, -2)$.
- Existují další řešení: $(-1, -3, 1)$, $(2, -1, -\frac{1}{2})$, $(11, 5, -5)$, ...
- Řešením je každá trojice $(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2})$, kde t je libovolné.
- Řešení je tedy nekonečně mnoho.
- Tato situace obvykle nastává, je-li rovnic méně než proměnných (v tomto příkladu třetí rovnice nepřidává žádnou informaci, je pouze součtem prvních dvou rovnic).

Motivační příklad 3

Příklad

$$\begin{array}{rrrcl} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & -3y & +2z & = & 9 \end{array}$$

Motivační příklad 3

Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & -3y & +2z & = & 9 \end{array}$$

Řešení

- Neexistuje žádné řešení: součtem prvních dvou rovnic dostáváme

$$3x - 3y + 2z = 8,$$

  což odporuje třetí rovnici.

Vyřešení a ekvivalence soustavy rovnic

- Vyřešením soustavy rovnic rozumíme nalezení všech řešení.
- Obvyklým postupem je převod soustavy na jednodušší soustavu se stejnou množinou řešení.

Definice (Ekvivalence soustav lineárních rovnic)

Soustavy lineárních rovnic se nazývají ekvivalentní, mají-li stejnou množinu řešení.

Úpravy soustavy

Následujícími úpravami získáme vždy ekvivalentní soustavu lineárních rovnic:

1. výměna libovolných dvou rovnic soustavy
2. vynásobení obou stran libovolné rovnice nenulovým číslem c
3. přičtení c-násobku i-té rovnice k j-té rovnici ($i \neq j$)

Každá z uvedených úprav je vratná. Původní soustavu dostaneme

1. opakováním výměny rovnic.
2. vynásobením stejné rovnice číslem $\frac{1}{c}$.
3. k j-té rovnici přičteme $(-c)$-násobek i-té rovnice.

Poznámky k úpravám soustavy

Obecně nelze kombinovat více úprav v jednom kroku (mohlo by to vést k neekvivalentní soustavě rovnic):

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array}$$

Současným přičtením 2. rovnice k 3. a 3. rovnice k 2. dostaneme

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & & = & 7 \\ 4x & +3y & +4z & = & 15 \\ 4x & +3y & +4z & = & 15 \end{array}$$

Tato soustava není ekvivalentní: původní soustava má jedno řešení, upravená soustava jich ma nekonečně mnoho.

Vektory a matice

Vektory

Definice (Vektor)

Vektor je uspořádaná n-tice prvků.

- Vektor se zapisuje do řádku či do sloupce jedním z následujících způsobů (vpravo jsou *sloupcové vektory*):

$$(-3, 2, 8) \qquad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

- Vektory stejného typu lze sčítat po složkách:

$$(-3, 2, 8) + (5, -5, 0) = (2, -3, 8)$$

- Násobení vektoru číslem:

$$5 \cdot (-3, 2, 8) = (-15, 10, 40)$$

Matice

Definice (Matice)

Maticí typu m/n rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Zápis $A = (a_{ij})$ znamená, že prvky matice A označujeme jmény tvaru a_{ij} dle uvedeného schématu.

Součin matic

Definice (Součin matic)

Součinem matic $A = (a_{ij})$ *typu* m/n *a* $B = (b_{jk})$ *typu* n/o *je matice* $C = (c_{ik})$ *typu* m/o *splňující*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

Součin matic

Definice (Součin matic)

Součinem matic $A = (a_{ij})$ *typu* m/n *a* $B = (b_{jk})$ *typu* n/o *je matice* $C = (c_{ik})$ *typu* m/o *splňující*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -9 \\ -11 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lze zapsat pomocí matic následovně:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Označíme-li matici a vektory pořadě A, x, b, dostáváme rovnici

$$A \cdot x = b.$$

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

Soustavu lineárních rovnic lze ještě úsporněji reprezentovat tzv. *rozšířenou maticí soustavy*:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Příklad

$$\begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & & = & 7 \\ x & & +2z & = & 1 \\ 3x & +3y & +2z & = & 14 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

Schodovitý tvar matice

Definice (Schodový tvar matice)

Vedoucí prvek i-tého řádku matice je největší nenulový prvek na i-tém řádku (nulový řádek nemá vedoucí prvek). Matice je v (řádkově) schodovitém tvaru, jestliže

1. *za nulovým řádkem následují už jen nulové řádky a*
2. *vedoucí prvek v každém nenulovém řádku je v pravějším sloupci než vedoucí prvky všech předcházejících řádků.*

Příklad

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 17 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Vedoucí prvky jsou červené.
- Pouze matice vlevo je ve schodovitém tvaru.

Řešení soustavy lineárních rovnic

Elementární řádkové transformace matic

Dříve zmíněné úpravy soustavy lineárních rovnic, které zachovávají ekvivalenci, přesně odpovídají následujícím *elementárním řádkovým transformacím* provedeným na rozšířené matici soustavy.

Definice (Elementární řádkové transformace)

Elementární řádkové transformace matic jsou

1. *výměna dvou řádků matice,*
2. *vynásobení jednoho řádku nenulovým číslem,*
3. *přičtení násobku některého řádku k jinému řádku.*

Gaussova eliminace

Věta (Gaussova eliminace)

Každou matici lze pomocí konečně mnoha elementárních řádkových úprav převést na řádkově schodovitý tvar.

Důkaz

Převod do schodovitého tvaru lze provést následujícím algoritmem.

1. Nechť j-tý sloupec je nejlevější nenulový sloupec matice. Vyměníme řádky tak, aby na prvním řádku byl v j-tém sloupci nenulový prvek a_{1j}.
2. K ostatním řádkům, které mají v tomto sloupci nenulový prvek a_{ij} přičteme $(-\frac{a_{ij}}{a_{1j}})$-násobek prvního řádku. Tím vynulujeme celý j-tý sloupec až na a_{1j}.
3. Tím jsme dostali první řádek do požadovaného tvaru. Opakovanou aplikací kroků 1 a 2 na zbylé řádky převedeme matici do požadovaného tvaru. □

Řešení soustavy lineárních rovnic

Postupujeme následovně:

1. Zapíšeme soustavu pomocí rozšířené matice soustavy $(A \mid b)$.
2. Rozšířenou matici převedeme Gaussovou eliminací na matici $(A' \mid b')$ ve schodovitém tvaru. Jelikož eliminace používá pouze elementární úpravy, reprezentuje výsledná rozšířená matice ekvivalentní soustavu lineárních rovnic.
3. Z rozšířené matice $(A' \mid b')$ vyčteme kolik řešení má soustava rovnic. Rozlišujeme tři situace:
   - Matice $(A' \mid b')$ obsahuje řádek tvaru $(0\ 0\ \dots\ 0 \mid k)$, kde k je nenulové číslo. Tento řádek odpovídá rovnici $0 = k$ a soustava proto nemá řešení. V opačných případě soustava má řešení a nastává jeden z následujících případů.
   - Matice A' má v každém sloupci nějaký vedoucí prvek. Pak má soustava právě jedno řešení.
   - V matice A' existuje sloupec, ve kterém není vedoucí prvek. Pak má soustava nekonečně mnoho řešení.
4. Řešení spočítáme pomocí tzv. *zpětné substituce*.

Zpětná substituce

- Nechť $(A' \mid b')$ je matice ve schodovitém tvaru neobsahující řádek tvaru $(0\ 0\ \ldots\ 0 \mid k)$ s nenulovým k.
- Proměnné odpovídající sloupcům matice A' bez vedoucího prvku nahradíme parametrem. Tyto proměnné mohou nabývat libovolné hodnoty. Hodnoty ostatních proměnných jsou v každém řešení závislé na konkrétních hodnotách parametrů.
- Každý neprázdný řádek

$$(0\ 0\ \ldots\ 0\ a'_{ij}\ a'_{i(j+1)}\ \ldots\ a'_{in} \mid b'_i)$$

převedeme na rovnici

$$x_j = \frac{1}{a'_{ij}} \cdot (b'_i - a'_{i(j+1)}x_{j+1}\ \ldots\ - a'_{in}x_n)$$

tyto rovnice postupně odspodu řešíme dosazením níže spočítaných hodnot a parametrů.

Příklady

Příklad 1

$$
\begin{array}{rrrcr}
2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\
x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\
3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 9
\end{array}
$$

Příklady

Příklad 1

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

Příklad 1

$$
\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\
x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\
3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 9
\end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & -3 & 0 & 7 \\
1 & 0 & 2 & 1 \\
3 & -3 & 2 & 9
\end{array}\right)
\longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & -3 & -4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 6
\end{array}\right)
$$

- Uvedená soustava lineárních rovnic nemá řešení.

Příklady

Příklad 2

$$
\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\
x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\
3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 8
\end{array}
$$

Příklady

Příklad 2

$$
\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\
x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\
3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 8
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & -3 & 0 & 7 \\
1 & 0 & 2 & 1 \\
3 & -3 & 2 & 8
\end{array}\right)
$$

Příklad 2

$$
\begin{array}{rrrcl}
2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\
x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\
3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 8
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & -3 & 0 & 7 \\
1 & 0 & 2 & 1 \\
3 & -3 & 2 & 8
\end{array}\right)
\quad \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \quad
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & -3 & -4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Příklad 2

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - 2x_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{-3}(5 + 4x_3) \end{array}$$

Příklady

Příklad 2

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1-2x_3 \\ x_2 & = & \frac{1}{-3}(5+4x_3) \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1-2t \\ x_2 & = & \frac{1}{-3}(5+4t) \\ x_3 & = & t \end{array}$$

- Řešením je tedy každá trojice $(1-2t, \frac{1}{-3}(5+4t), t)$ kde t je libovolné.
- To je totéž jako $(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2})$.

Příklady

Příklad 3

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -3x_2 & & = & 7 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 14 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \dots$$

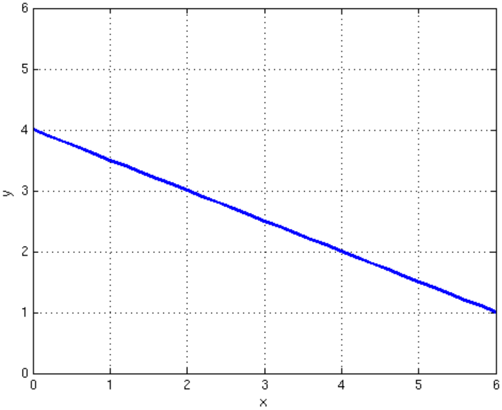
Efektivita Gaussovy eliminace

- Gaussova eliminační metoda je velmi efektivní při ručním řešení malých soustav rovnic i pro počítačové řešení větších soustav (stovky až tisíce rovnic).
- Pro rozsáhlejší soustavy existují efektivnější algoritmy.

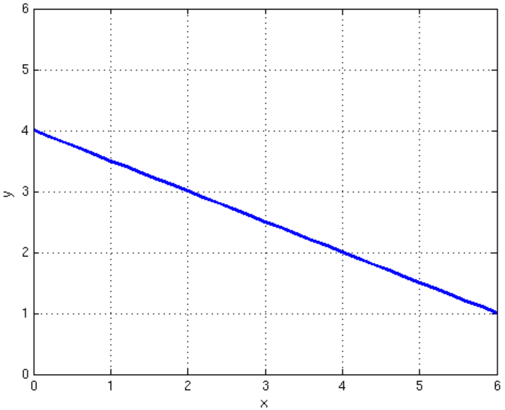
Geometrický význam lineárních rovnic

Lineární rovnice o dvou neznámých

- Lineární rovnice o dvou neznámých má nekonečně mnoho řešení, které tvoří *přímku* v dvojrozměrném prostoru.
- Řešením $x + 2y = 8$ je každá dvojice tvaru $(t, 4 - \frac{t}{2})$.



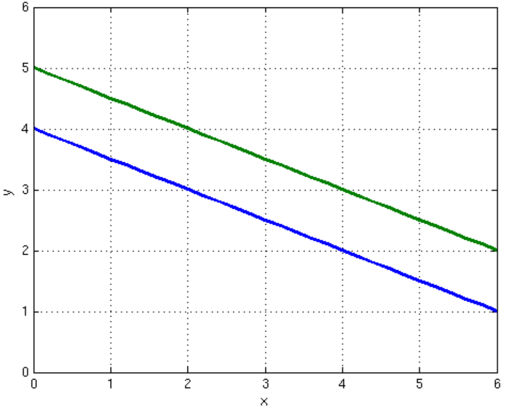
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



- $x + 2y = 8$

Soustava lineárních rovnice o dvou neznámých

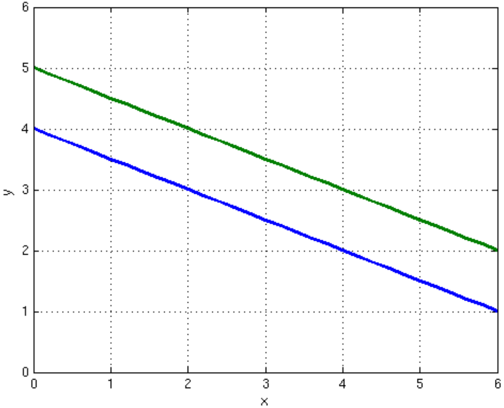
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



- $x + 2y = 8$
- $x + 2y = 10$

Soustava lineárních rovnice o dvou neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



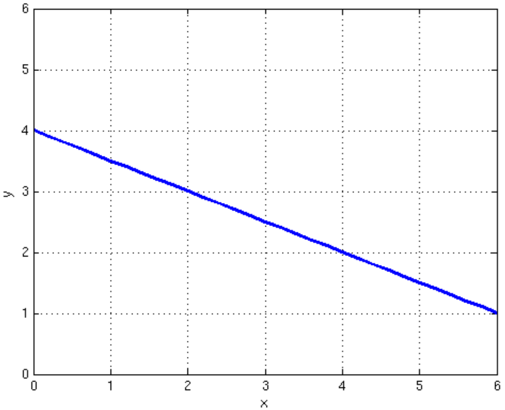
$x + 2y = 8$

$x + 2y = 10$

nemá řešení

Soustava lineárních rovnice o dvou neznámých

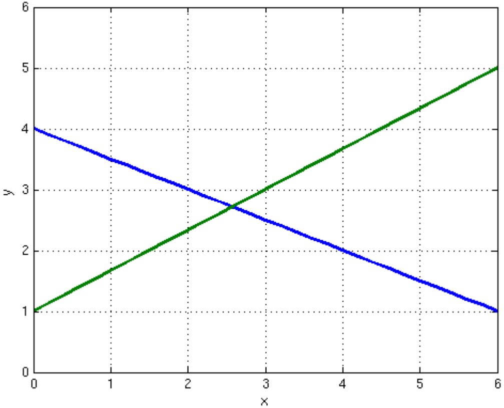
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



- $x + 2y = 8$

Soustava lineárních rovnice o dvou neznámých

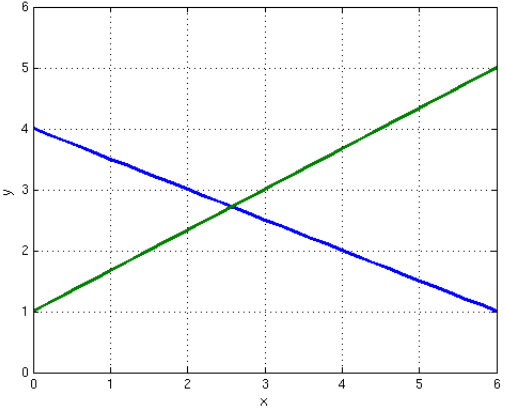
- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.



- $x + 2y = 8$
- $2x - 3y = -3$

Soustava lineárních rovnice o dvou neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik odpovídajících přímek.

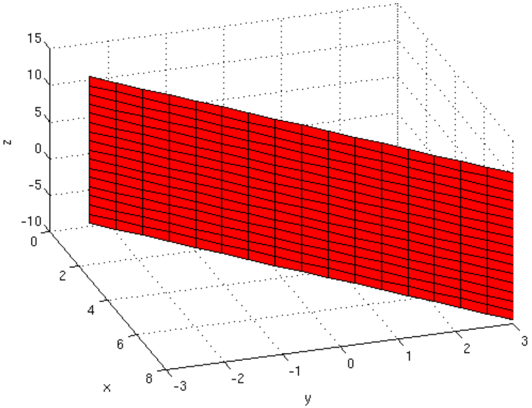


- $x + 2y = 8$
- $2x - 3y = -3$

má řešení $(\frac{18}{7}, \frac{19}{7})$

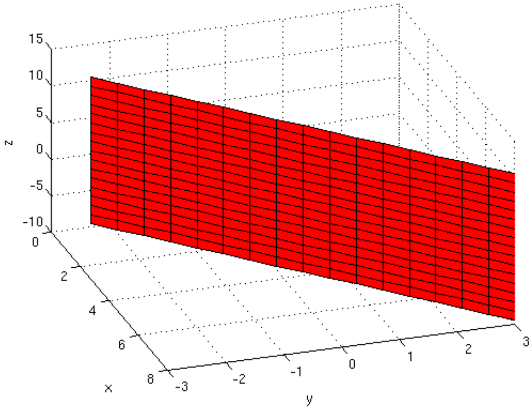
Lineární rovnice o třech neznámých

- Lineární rovnice o třech neznámých má nekonečně mnoho řešení, které tvoří *rovinu* v trojrozměrném prostoru.
- Řešením $2x - 3y + 0z = 7$ je každá trojice tvaru $(t, \frac{2t-7}{3}, r)$.



Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

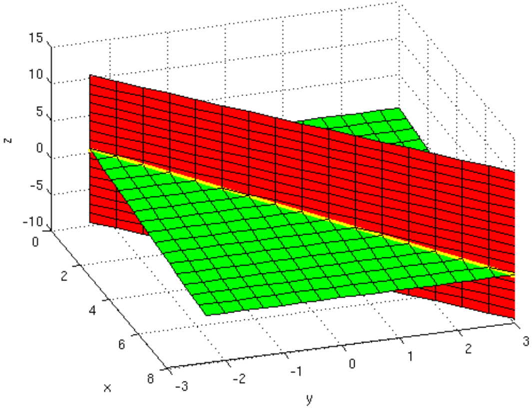
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



- $2x - 3y = 7$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

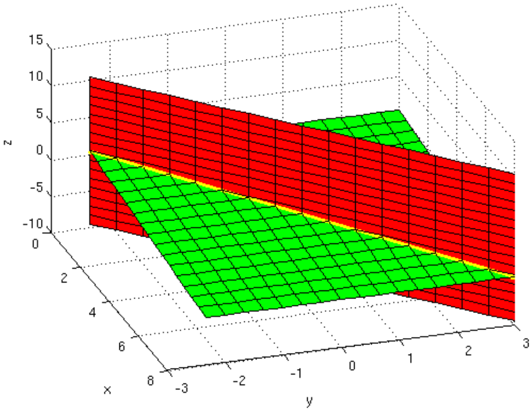
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



$$\begin{aligned} 2x - 3y \quad &= 7 \\ x \quad + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.

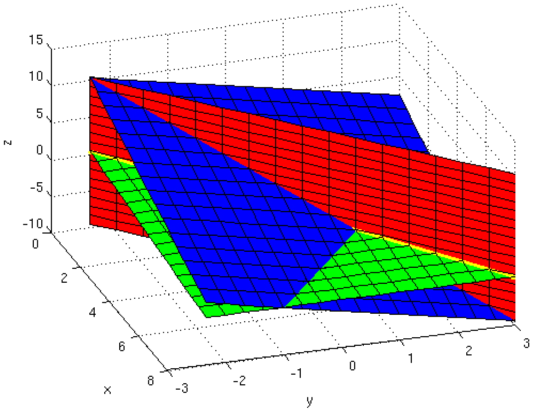


$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ x + 2z &= 1 \end{aligned}$$

řešení tvoří přímku

$$\left(t, \frac{2t-7}{3}, \frac{1-t}{2}\right)$$

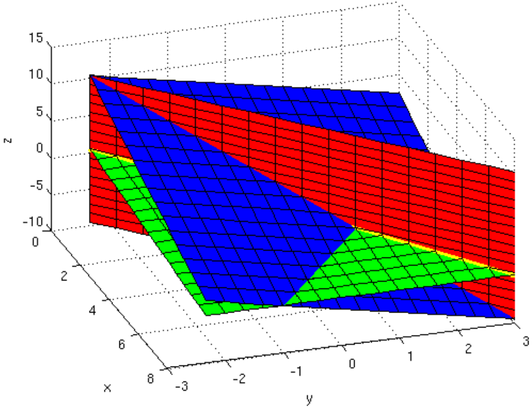
- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



$$
\begin{aligned}
2x - 3y \phantom{{}+2z} &= 7\\
x \phantom{{}-3y} + 2z &= 1\\
3x + 3y + 2z &= 14
\end{aligned}
$$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Řešením soustavy lineárních rovnic o třech neznámých je průnik odpovídajících rovin.



$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ x + 2z &= 1 \\ 3x + 3y + 2z &= 14 \end{aligned}$$

jediné řešení je $(5, 1, -2)$

Soustava lineárních rovnic o třech neznámých

- Všechna řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých mohou tvořit:
  - rovinu (typicky pokud máme jednu rovnici)
  - přímku (typicky pokud máme dvě rovnice)
  - bod (typicky pokud máme tři rovnice)
- Soustava také nemusí mít žádné řešení (typicky pokud máme více jak tři rovnice nebo pokud nějaké dvě rovnice odpovídají rovnoběžným rovinám).