

Kombinatorika, výpočty

Radek Pelánek

IV122, jaro 2014

- jednoduché výpočty s čísly
- vesměs spíše opakování + pár dílčích zajímavostí

Kombinace, permutace, variace

Daná množina M s n prvky

- 1 **permutace** = uspořádání zadaných prvků do fixního pořadí
- 2 k prvkové **kombinace** = všechny možné výběry k prvků ze zadané množiny
- 3 k prvkové **kombinace s opakováním** = všechny možné výběry k prvků ze zadané množiny, přičemž prvky se mohou opakovat
- 4 k prvkové **variace** = všechny možné uspořádané výběry k prvků ze zadané množiny
- 5 k prvkové **variace s opakováním** = všechny možné uspořádané výběry k prvků ze zadané množiny, přičemž prvky se mohou opakovat

Kombinace, permutace, variace – příklady

Úloha	Vstup	Výstup
permutace	A, B, C	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
kombinace	A, B, C, D $k = 2$	AB, AC, AD, BC, BD, CD
kombinace s opakováním	A, B, C, D $k = 2$	AA, AB, AC, AD, BB, BC, BD, CC, CD, DD
variace	A, B, C, D $k = 2$	AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC
variace s opakováním	A, B, C $k = 2$	AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC

Kombinace, permutace, variace – počty prvků

- Počet všech permutací n prvků je ...
- Počet všech k prvkových kombinací z n prvků je ...
- Počet všech k prvkových kombinací s opakováním z n prvků je ...
- Počet všech k prvkových variací z n prvků je ...
- Počet všech k prvkových variací s opakováním z n prvků je ...

Kombinace, permutace, variace – počty prvků

- Počet všech permutací n prvků je $n!$.
- Počet všech k prvkových kombinací z n prvků je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
- Počet všech k prvkových kombinací s opakováním z n prvků je $\binom{n+k-1}{k}$.
- Počet všech k prvkových variací z n prvků je $\frac{n!}{(n-k)!}$.
- Počet všech k prvkových variací s opakováním z n prvků je n^k .

Úkol: generování kombinací, permutací, variací

- Vstup: množina (seznam) a případně k
- Výstup: (uspořádaný) výpis všech permutací/kombinací/variací (s opakováním)
- vede na přirozené využití **rekurze**
- myšlenkově podobné \Rightarrow programy by měly být podobné

Výpočet kombinačního čísla

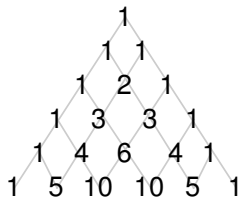
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

```
def comb_number(n, k):  
    if k == 0 or k == n:  
        return 1  
    else:  
        return comb_number(n-1, k-1) + \  
            comb_number(n-1, k)
```

Výpočet kombinačního čísla

- neefektivní – opakované výpočty
- podobné jako klasická ukázka neefektivního použití rekurze u Fibonacciho čísel
- efektivněji:
 - explicitní vztah
 - počítání „od spodu“

Pascalův trojúhelník



$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \end{array}$$

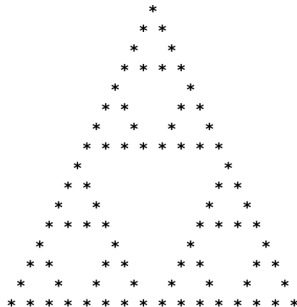
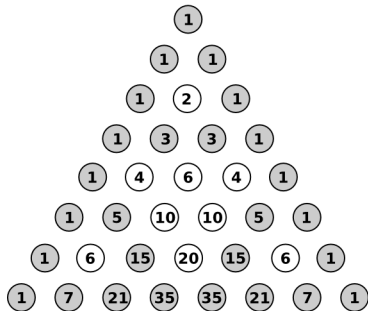
Explicitní vzorec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Rekurzivní vztah

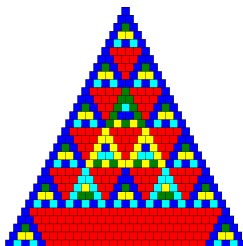
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascalův trojúhelník a Sierpińského fraktál



Obarvování čísel: Pascal a Ulam

- video Vi Hart: Sick Number Games
http://www.youtube.com/watch?v=Yh1v5Aeuo_k
- obarvování Pascalova trojúhelníku modulo k
- vztah k jednorozměrným buněčným automatům



Umocňování

$$x^y$$

- x, y – kladná čísla (ne nutně celá)
- např. $3.45^{1.2}$
- co to vlastně znamená?
- jak vypočítat?
přibližná hodnota, jen pomocí základních aritmetických operací

Efektivní umocňování

$$a^n \bmod k$$

- a, n, k – přirozená čísla
- jak vypočítat efektivně? (lépe než lineárně vzhledem k n)
- aplikace např. v kryptologii

Výpočet π

- $\pi = 3,141592653589793 \dots$
- iracionální číslo
- známé s přesností na miliardy cifer
- jak se určuje hodnota π ?
- zmíníme jen velmi naivní metody – přímočaré cvičení na „experimentální porovnání“

Výpočet π

Gregoryho-Leibnizova řada (součet je π):

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \dots$$

(Důkaz: $\arctan(1)$, integrál)

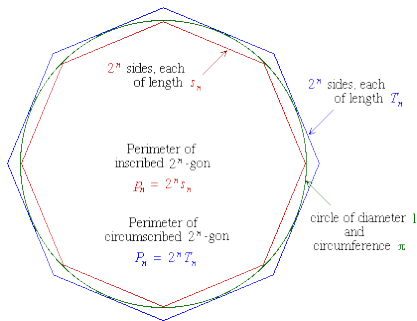
Výpočet π

Archimedova metoda (dvě posloupnosti a_n, b_n společně konvergující k π)

$$a_0 = 2\sqrt{3}; b_0 = 3$$

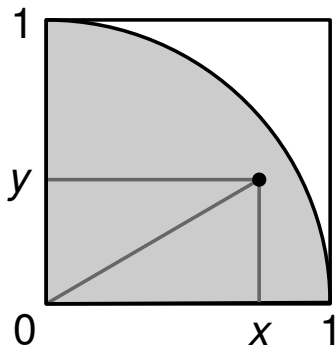
$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$$



<http://personal.bgsu.edu/~carother/pi/Pi3a.html>

Výpočet π – Monte Carlo



- obsah čtvrtedisku: $\pi/4$
- obsah čtverce: 1

Úkol: Výpočet π

- implementujte uvedené metody
- (najděte další metody a implementujte je)
- experimentálně vyhodnoťte jednotlivé metody – jaké přesnosti jsou schopny dosáhnout během 1 vteřiny?

Umocňování: rady

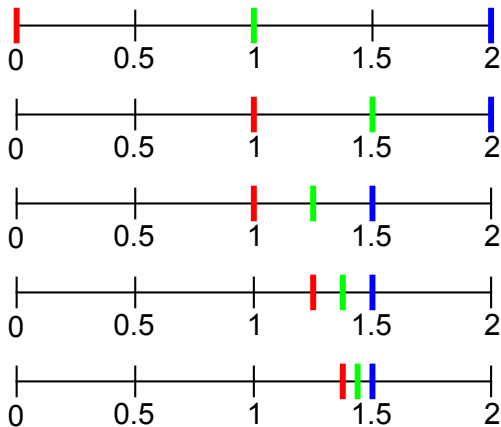
$$x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$$

výpočet odmocniny:

- vstup: číslo x
- výstup: přibližná hodnota \sqrt{x}
- základní metoda: binární půlení (rozhodně ne nejvíce efektivní)

Výpočet odmocniny: binární půlení

spodní odhad střed horní odhad



Umocňování a Taylorova řada

Taylorova řada:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Pro $f(x) = x^k$ a $x_0 = 1$ lze snadno vypočítat.