První zkoušková práce, 20. 5. 2014
skupina B

Příklad 1. (5b.) Najděte všechna celá kladná čísla, která mohou být největším společným dělitelem celých čísel $5n+4$ a $8n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{Z}$. (Uvažte, že $NSD(a,b) = NSD(a, a-b)$).

Řešení. Víme, že největší společný dělitel daných čísel musí dělit libovolnou jejich lineární kombinaci, tedy i $8\cdot(5n+4) - 5\cdot(8n+1) = 27$. Musí tedy být roven některému z (kladných) dělilů čísla 27, neboli některému z čísel 1, 3, 9, 27. Všechny varianty jsou vskutku možné (posupně pro $n = 0$, $n = 4$, $n = 1$ a $n = 10$).

Příklad 2. (5b.) Určete nějaký primitivní kořen modulo 79. (79 je prvočíslo. Vzpomeňte na druhou vnitrosemestrálku. Můžeme říci něco o 39-té mocnině hledaného primitivního kořene?)

Řešení. Víme, že 39-tá mocnina primitivního kořene modulo 79 musí být kongruentní s -1 modulo 79. Postupujeme od nejmenšího čísla (pro jednoduchost). Spočítáme $2^{39} \equiv 1 \pmod{79}$, $3^{39} \equiv -1 \pmod{79}$, je tedy 3 možný primitivní kořen. Je nutno ověřit, jestli $3^{78/q} \not\equiv 1 \pmod{79}$ pro libovolné prvočíslo q dělící $\varphi(79) = 78$, v našem případě zbývá ověřit 6-tou a 26-tou mocninu. Spočítáme $3^6 \equiv 18 \pmod{79}$ a $3^{26} \equiv 23 \pmod{79}$, je tedy číslo 3 vskutku primitivním kořenem.

Příklad 3. (4b.) Metodou vytvořujících funkcí nalezněte posloupnost (x_n) splňující pro $n \geq 1$:

$$2x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Řešení. Podle podmínek zadání musí vytvořující funkce $A(x)$ posloupnosti $[x_1, x_2, x_3, \dots]$ splňovat rovnici:

$$2A(x) = xA(x) + x^2A(x) + 2 + 5x,$$

tedy

$$A(x) = \frac{2+5x}{2-x-x^2} = \frac{7}{3}\frac{1}{1-x} - \frac{8}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}.$$

U této funkce už umíme (např. podle zobecněné binomické věty) určit jednotlivé koeficienty v jejím rozvoji do mocninné řady. Přímo tak odečteme, že n-tý koeficient, tedy $(n+1)$ člen hledané posloupnosti (nesmíme zapomenout na úvodní posun) je

$$x_n = \frac{7}{3} + \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

.

Příklad 4. (6b.) Kolika způsoby lze vybrat 60 kuliček tří barev (červená, modrá, zelená), přičemž počet červených a modrých je sudý?