

IB112 Základy matematiky

Grafy

Jan Strejček

- *Základní pojmy*
 - graf, základní typy grafů
 - stupeň vrcholu
 - podgrafy a izomorfismus
 - orientované grafy, ohodnocené grafy, multigrafy
- *Souvislost grafu*
 - souvislé komponenty
 - vyšší stupně souvislosti
- *Stromy*
 - stromy, kořenové stromy, uspořádané stromy
 - izomorfismus stromů
 - kostra grafu
- *Toky v sítích*
 - sítě, toky a řezy
 - Ford-Fulkersonův algoritmus

Základní pojmy

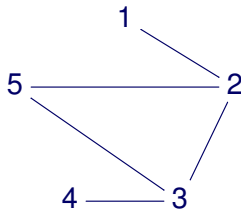
Definice (Graf)

(Neorientovaný) *graf* je dvojice $G = (V, E)$, kde

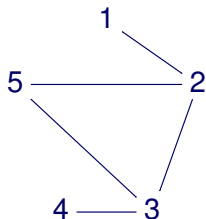
- V je množina *uzlů* nebo též *vrcholů* a
- E je množina *hran*, kde hrana je dvouprvková podmnožina množiny V .

Příklad

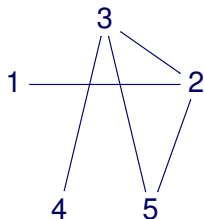
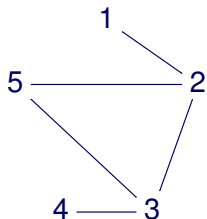
- $G = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{1, 2\}, \{2, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\})$



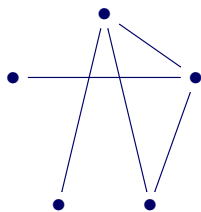
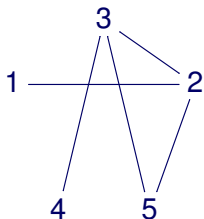
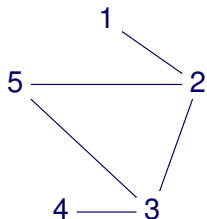
- Množiny vrcholů a hran grafu G zapisujeme také $V(G)$, $E(G)$.
- Grafy se obvykle znázorňují graficky.



- Množiny vrcholů a hran grafu G zapisujeme také $V(G)$, $E(G)$.
- Grafy se obvykle znázorňují graficky.
- Na rozmístění uzlů nezáleží.

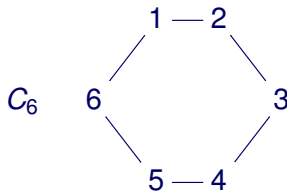


- Množiny vrcholů a hran grafu G zapisujeme také $V(G)$, $E(G)$.
- Grafy se obvykle znázorňují graficky.
- Na rozmístění uzlů nezáleží.
- Často nám jde spíše o strukturu grafu než o pojmenování uzlů. Jména uzlů pak nepíšeme.



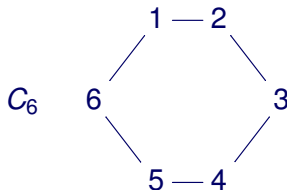
Kružnice

- Kružnice délky n má $n \geq 3$ vrcholů spojených n hranami do jednoho cyklu.
- Značí se C_n .



Kružnice

- Kružnice délky n má $n \geq 3$ vrcholů spojených n hranami do jednoho cyklu.
- Značí se C_n .



Cesta

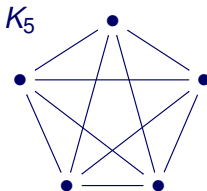
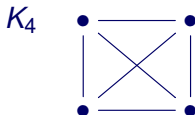
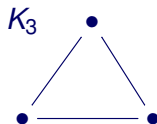
- Cesta délky $n \geq 0$ má $n + 1$ vrcholů spojených do řady n hranami.
- Značí se P_n .



Základní typy grafů

Úplný graf

- Úplný graf s n vrcholy má $n \geq 1$ vrcholů a mezi každými dvěma různými vrcholy vede hrana. Celkem má tedy $\binom{n}{2}$ hran.
- Značí se K_n .

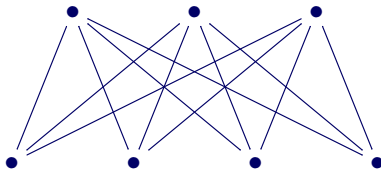


...

Úplný bipartitní graf

- Úplný bipartitní graf s $n \geq 1$ a $m \geq 1$ vrcholy má $n + m$ vrcholů rozdělených do dvou množin po n a m prvcích. Graf má hranu mezi každými dvěma vrcholy z různých skupin.
- Značí se $K_{n,m}$.

$K_{3,4}$

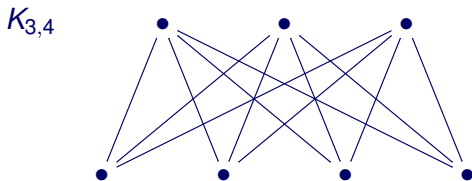


Příklad

- Existuje graf, který je zároveň úplný a úplný bipartitní?

Úplný bipartitní graf

- Úplný bipartitní graf s $n \geq 1$ a $m \geq 1$ vrcholy má $n + m$ vrcholů rozdělených do dvou množin po n a m prvcích. Graf má hranu mezi každými dvěma vrcholy z různých skupin.
- Značí se $K_{n,m}$.



Příklad

- Existuje graf, který je zároveň úplný a úplný bipartitní?
- Ano.

$$K_2 = K_{1,1} \quad \bullet - \bullet$$

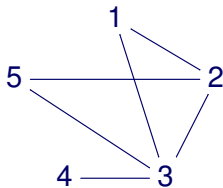
Stupeň vrcholu

Definice (Stupeň vrcholu)

Stupeň vrcholu u v grafu G je počet hran vycházejících z u . Stupeň vrcholu značíme $d_G(u)$ nebo jen $d(u)$.

Příklad

- Zjistěte stupně vrcholů.



$$d(1) =$$

$$d(2) =$$

$$d(3) =$$

$$d(4) =$$

$$d(5) =$$

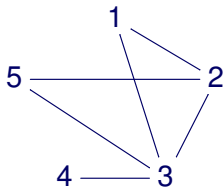
Stupeň vrcholu

Definice (Stupeň vrcholu)

Stupeň vrcholu u v grafu G je počet hran vycházejících z u . Stupeň vrcholu značíme $d_G(u)$ nebo jen $d(u)$.

Příklad

- Zjistěte stupně vrcholů.



$$\begin{aligned}d(1) &= 2 \\d(2) &= 3 \\d(3) &= 4 \\d(4) &= 1 \\d(5) &= 2\end{aligned}$$

- Stupně vrcholů můžeme uspořádat podle velikosti: 1, 2, 2, 3, 4

Věta

Součet stupňů vrcholů v libovolném grafu je vždy sudý a rovný dvojnásobku počtu hran.

Důkaz

Každá hrana vychází ze dvou uzlů a je tedy započítaná dvakrát do součtu stupňů. □

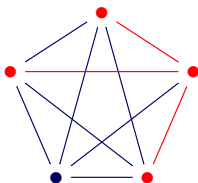
Definice (Podgraf a indukovaný podgraf)

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ je libovolný graf $H = (V', E')$ takový, že $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a přitom hrany v E' vedou pouze mezi vrcholy ve V' .

Podgraf $H = (V', E')$ grafu G je *indukovaný* (množinou vrcholů V'), jestliže množina jeho hran E' obsahuje všechny hrany z E vedoucí mezi vrcholy z V' .

Příklad

- H je podgraf, ale není indukovaný.



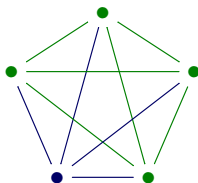
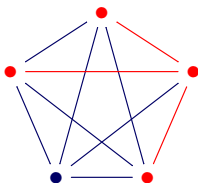
Definice (Podgraf a indukovaný podgraf)

Podgrafem grafu $G = (V, E)$ je libovolný graf $H = (V', E')$ takový, že $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ a přitom hrany v E' vedou pouze mezi vrcholy ve V' .

Podgraf $H = (V', E')$ grafu G je **indukovaný** (množinou vrcholů V'), jestliže množina jeho hran E' obsahuje všechny hrany z E vedoucí mezi vrcholy z V' .

Příklad

- H je podgraf, ale není indukovaný.
- H' je indukovaný podgraf.



Intuitivně: grafy jsou izomorfní, pokud se liší pouze pojmenováním vrcholů (a/nebo jejich rozmístěním).

Definice (Izomorfismus grafů)

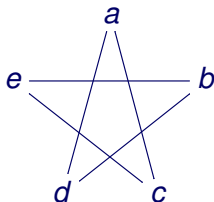
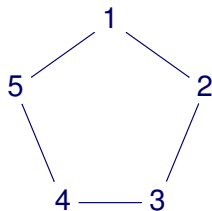
Grafy $G = (V, E)$ a $H = (V', E')$ jsou *izomorfní*, píšeme $G \simeq H$, pokud existuje bijekce $f : V \rightarrow V'$ taková, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ platí

$$\{u, v\} \in E \iff \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Bijekci f pak nazýváme *izomorfismus*.

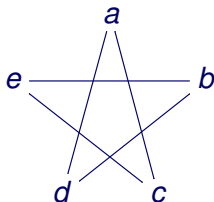
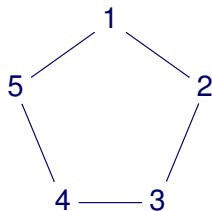
Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.



Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.
- Ano, jsou.



$$f(1) = a$$

$$f(2) = c$$

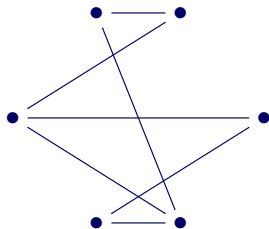
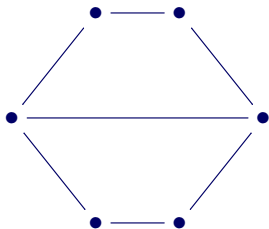
$$f(3) = e$$

$$f(4) = b$$

$$f(5) = d$$

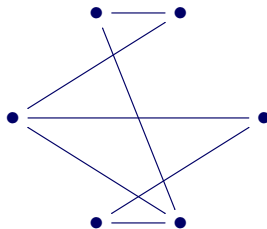
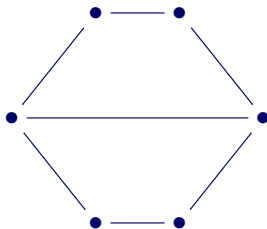
Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.



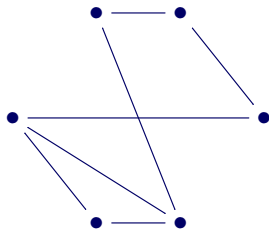
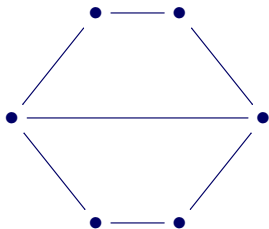
Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.
- Ano, jsou.



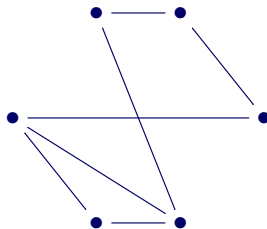
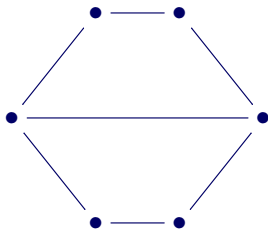
Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.



Příklad

- Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní.
- Ne, nejsou.



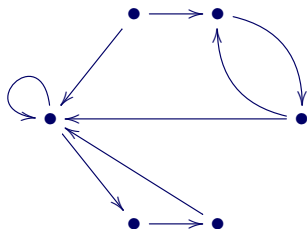
Definice (Kružnice, cesta a klika v grafu)

Podgraf H grafu G se nazývá

- *kružnice v G , je-li izomorfní nějaké kružnici.*
- *cesta v G , je-li izomorfní nějaké cestě.*
- *klika v G , je-li izomorfní nějakému úplnému grafu.*

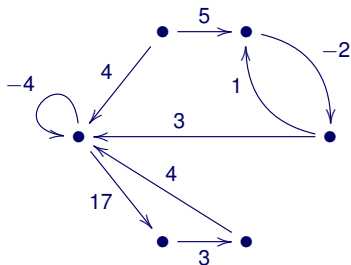
Orientované grafy

- Hrany jsou uspořádané dvojice vrcholů.
- Hrana (u, v) začíná v uzlu u a vede do uzlu v .
- Hrana (u, v) se graficky značí $u \rightarrow v$.
- Hrana (u, u) se nazývá *smyčka*.



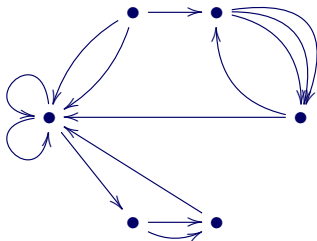
Ohodnocené grafy

- Graf je rozšířen o funkci $h : H \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazující hranám čísla.
- V grafické reprezentaci se přiřazená čísla napíší k hranám.
- Ohodnocené grafy mohou být orientované i neorientované.



Multigrafy

- V multigrafu může být více různých hran vedoucích mezi stejnými uzly.
- Multigrafy mohou být ohodnocené i neohodnocené, orientované i neorientované.



Z předmětu IB111 Programování a algoritmizace znáte

- způsoby reprezentace grafu v počítačích
 - matice sousednosti
 - pole ukazatelů na seznamy sousedů
 - ...
- algoritmy
 - procházení grafu do šířky
 - procházení grafu do hloubky
 - nejkratší cesty
 - nalezení (minimální) kostry grafu
- Eulerovské grafy (nakreslitelné jedním tahem)

Souvislost grafu

Budeme uvažovat neorientované grafy.

Definice (Sled)

Sled délky n v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

ve které pro každou hranu e_i platí $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Věta

Na vrcholech grafu G definujeme binární relaci \sim takto:

$$u \sim v \iff \text{existuje sled začínající v } u \text{ a končící ve } v$$

Relace \sim je ekvivalence.

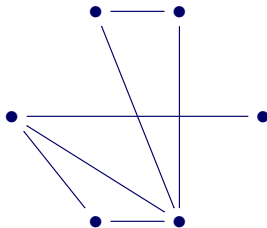
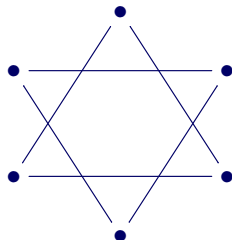
Definice (Souvislé komponenty, souvislý graf)

*Třídy ekvivalence \sim se nazývají **souvislé komponenty**.
Jsou-li každé dva vrcholy grafu v relaci \sim , pak je graf **souvislý**.*

- Souvislé komponenty jsou definovány jako množiny vrcholů. Často se pod tímto názvem ale myslí podgrafy indukované těmito množinami vrcholů.
- Graf je souvislý, právě když má jedinou souvislou komponentu.

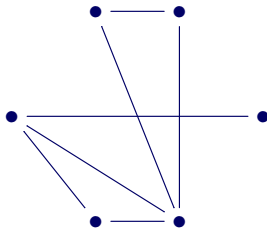
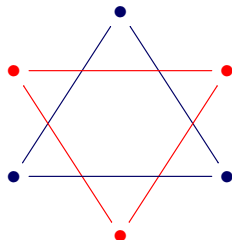
Příklad

- Určete, které z následujících grafů jsou souvislé. Určete počet komponent.



Příklad

- Určete, které z následujících grafů jsou souvislé. Určete počet komponent.



- Levý graf má dvě souvislé komponenty, není tedy souvislý.
- Pravý graf má jednu souvislou komponentu, je souvislý.

Definice

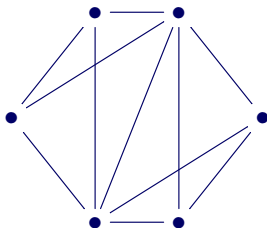
Necht' $k > 1$. Graf G je **hranově k -souvislý**, je-li souvislý i po odebrání libovolných $k - 1$ hran.

Graf G je **vrcholově k -souvislý**, je-li souvislý i po odebrání libovolných $k - 1$ vrcholů.

- Jedná se o prakticky motivované pojmy.
- Chceme kupříkladu vědět, kolik úseků elektrického vedení se může zpřetrhat než v nějakém místě sítě dojde k výpadku (hranová souvislost).
- Podobně vrcholová souvislost například říká, kolik serverů může zkolabovat aniž by byl narušen provoz zbytku sítě.

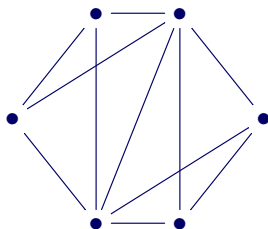
Příklad

- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:



Příklad

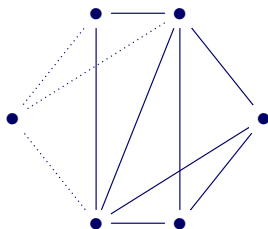
- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:



- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?

Příklad

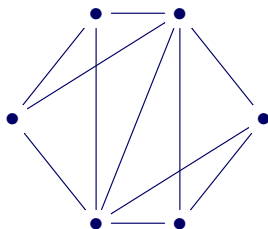
- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:



- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?

Příklad

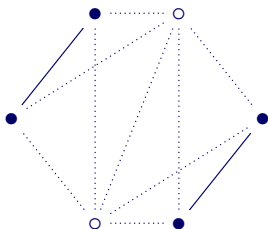
- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:



- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?
- Vrcholová souvislost je 2. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 2 vrcholů. Kterých?

Příklad

- Určete hranovou a vrcholovou souvislost tohoto grafu:



- Hranová souvislost je 3. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 3 hran. Kterých?
- Vrcholová souvislost je 2. Nesouvislý graf získáme odebráním alespoň 2 vrcholů. Kterých?

Věta (Mengerova věta)

Graf G je hranově k -souvislý právě když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje alespoň k hranově disjunktních cest (vrcholy mohou být sdílené).

Graf G je vrcholově k -souvislý právě když mezi každými dvěma různými vrcholy existuje alespoň k disjunktních cest (různých až na dva spojované vrcholy).

Stromy

Les a strom

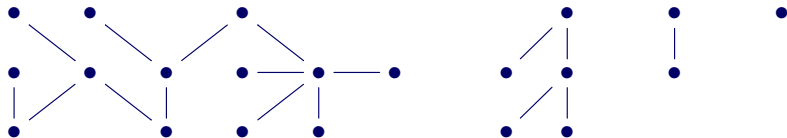
Budeme uvažovat neorientované grafy. Stromy i lesy lze definovat i na orientovaných grafech.

Definice (Les, strom)

Les je graf bez kružnic.

Strom je souvislý graf bez kružnic.

Příklad



Les a strom

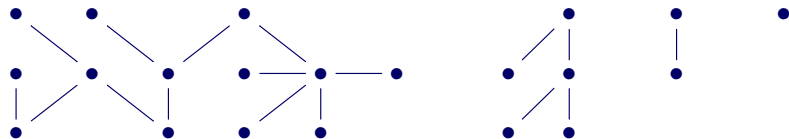
Budeme uvažovat neorientované grafy. Stromy i lesy lze definovat i na orientovaných grafech.

Definice (Les, strom)

Les je graf bez kružnic.

Strom je souvislý graf bez kružnic.

Příklad



Čtyři stromy. Nebo les?

Lemma

Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jedna cesta.

Důkaz

- Existence cesty mezi každými dvěma uzly plyne ze souvislosti.
- Kdyby mezi nějakými dvěma uzly vedly alespoň dvě cesty, musel by graf obsahovat kružnici. □

Lemma

Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jedna cesta.

Důkaz

- Existence cesty mezi každými dvěma uzly plyne ze souvislosti.
- Kdyby mezi nějakými dvěma uzly vedly alespoň dvě cesty, musel by graf obsahovat kružnici.

Lemma

Přidáme-li do stromu jednu hranu, vznikne právě jedna kružnice.

Důkaz

- Aby přidáním hrany $\{u, v\}$ vznikly alespoň dvě kružnice, musí mezi u a v vést alespoň dvě cesty. A to nelze.

Lemma

Strom s více než jedním vrcholem má nějaký vrchol stupně 1.

Důkaz

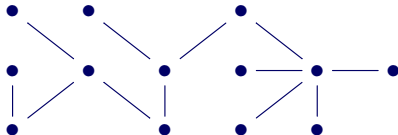
- V grafu najdeme sled maximální délky, ve kterém se uzly neopakují.
- Graf má více než jeden uzel, délka sledu je proto alespoň 1.
- Stupeň posledního uzlu sledu je alespoň 1.
- Kdyby měl poslední uzel stupeň větší než 1, šel by sled prodloužit o uzel, který ve sledu ještě není (graf je nacyklický).
- Poslední uzel sledu má tedy stupeň 1. □

Definice (List)

List je vrchol stromu se stupněm 1.

Příklad

- Kolik má tento strom listů?

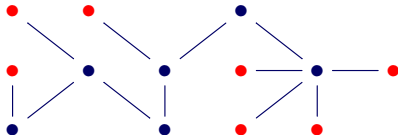


Definice (List)

List je vrchol stromu se stupněm 1.

Příklad

- Kolik má tento strom listů?
- Sedm (list = ●).

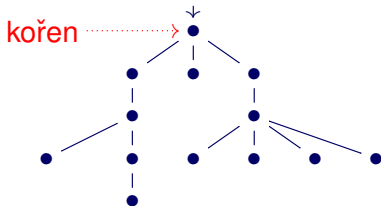
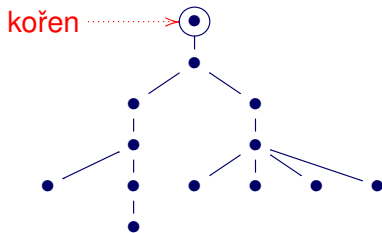


Kořenový strom

Definice (Kořenový strom)

Kořenový strom je dvojice (T, r) , kde T je strom a r je jeho vrchol zvaný *kořen*.

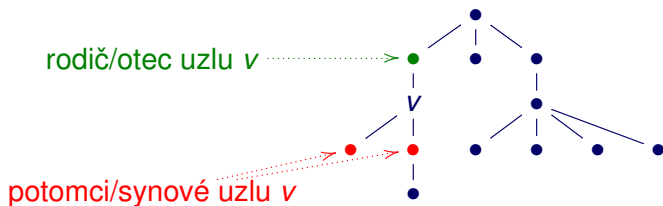
- Kořenové stromy kreslíme zpravidla od kořene směrem dolů.
- Kořen obvykle nenazýváme listem, i když má stupeň 1.
- Pod pojmem *strom* často myslíme právě kořenový strom.
- Kořen se značí různě nebo se pozná právě tím, že je nejvýš.



Definice

Nechť (T, r) je kořenový strom a v je jeho uzel. Nechť u je předposlední uzel na cestě z kořene r do v . Pak u se nazývá **rodič** uzlu v a v se nazývá **potomek** uzlu u .

- Místo pojmů **rodič** a **potomek** se také říká **otec** a **syn**.

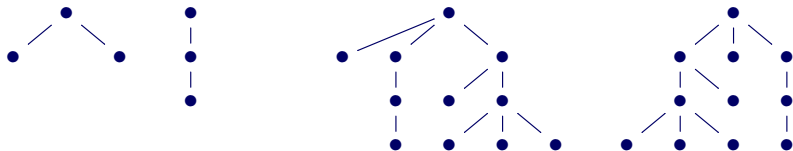


Definice

Kořenové stromy (T, r) a (T', r') jsou **izomorfní**, pokud existuje izomorfismus mezi grafy T a T' takový, že kořen r je zobrazen na kořen r' .

Příklad

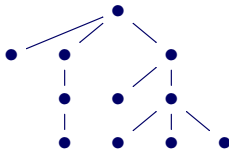
- Grafy vlevo jsou izomorfní, ale pokud je chápeme jako kořenové stromy, tak izomorfní nejsou.
- Kořenové stromy vpravo jsou izomorfní.



Definice (Uspořádaný strom)

Kořenový strom (T, r) je **uspořádaný**, pokud je pro každý vrchol stromu jednoznačně dáno pořadí jeho potomků.

- V grafické podobě je uspořádání dáno pořadím nakreslení potomků.



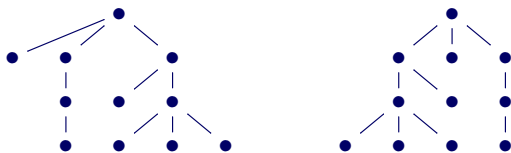
Izomorfismus uspořádaných stromů

Definice (Izomorfismus uspořádaných stromů)

Dva uspořádané kořenové stromy jsou **izomorfní**, pokud mezi nimi existuje izomorfismus f kořenových stromů, který zachovává pořadí potomků (tj. má-li uzel u potomky pořadě v_1, v_2, \dots, v_n , pak $f(u)$ musí mít potomky pořadě $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$).

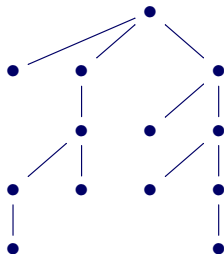
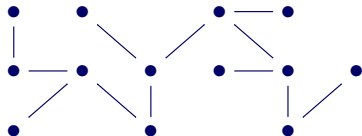
Příklad

- Uvedené uspořádané stromy nejsou izomorfní.



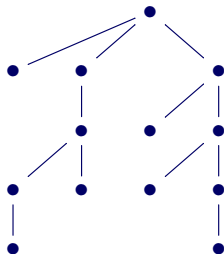
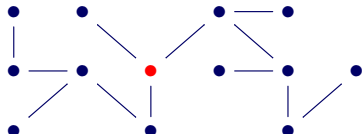
Příklad

- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?



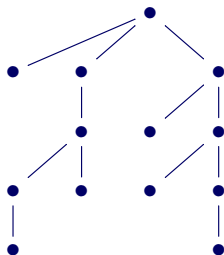
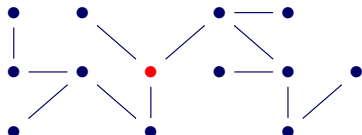
Příklad

- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?
- Ano, lze.



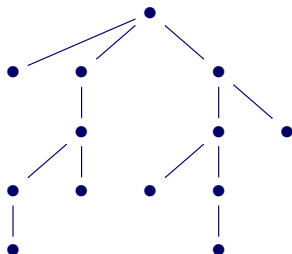
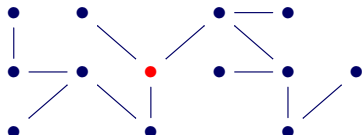
Příklad

- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?
- Ano, lze.
- Budou vzniklé uspořádané kořenové stromy izomorfní?



Příklad

- Lze ve stromu nalevo zvolit uzel r tak, aby byl kořenový strom (T, r) izomorfní kořenovému stromu vpravo?
- Ano, lze.
- Budou vzniklé uspořádané kořenové stromy izomorfní?
- Ne. Tradiční zobrazení levého uspořádaného kořenového stromu vypadá takto:

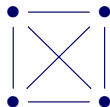


Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme *kostrou*, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4 ?

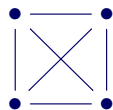


Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme *kostrou*, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4 ? Celkem 16.



Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme *kostrou*, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4 ? Celkem 16.
- Jaká bude odpověď, kdybych počítal všechny izomorfní kostry jako jednu?



4x



4x



4x



2x



2x

Definice

Podgraf G' souvislého grafu G nazýváme *kostrou*, pokud obsahuje všechny vrcholy grafu G a zároveň je stromem.

Příklad

- Kolik různých koster má úplný graf se 4 vrcholy K_4 ? Celkem 16.
- Jaká bude odpověď, kdybych počítal všechny izomorfní kostry jako jednu? Pouze 2.



Toky v sítích

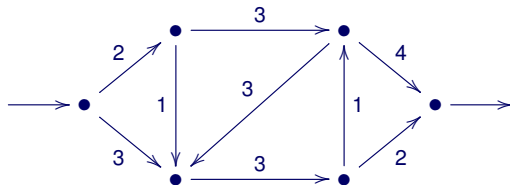
Definice (Sítě)

Sítě je čtveřice (G, z, s, w) , kde

- G je orientovaný graf,
- $z, s \in V(G)$ jsou vrcholy G zvané *zdroj* (z) a *stok* (s),
- $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ je kladné ohodnocení hran zvané *kapacita hran*.

- Sítěmi se modelují situace, kdy přepravujeme nějaký materiál pomocí daného systému cest (vodovodní potrubí, plynovod, dopravní síť, internet, atd.).
- Zpravidla nás zajímá, kolik nejvíc materiálu lze přepravovat pomocí dané sítě od zdroje ke stoku.

- Síť (G, z, s, w) znázorňujeme jako ohodnocený orientovaný graf (G, w) , kde označíme zdroj a stok (například šipkami do uzlu a z uzlu).



- Tok v síti formalizuje momentální proudění materiálu od zdroje ke stoku.
- Velikost toku je celkové množství materiálu přepravovaného od zdroje ke stoku.
- Pro zjednodušení zápisu budeme psát $e \rightarrow v$ ve smyslu “hrana e vedoucí do v ” a $e \leftarrow v$ ve smyslu “hrana e vedoucí z v ” a

Definice (Tok, velikost toku)

Tok v síti (G, z, s, w) je funkce $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ splňující

- pro všechny hrany $e \in E(G)$ platí $0 \leq f(e) \leq w(e)$,
- pro každý vrchol $v \in V(G) \setminus \{z, s\}$ platí $\sum_{e \rightarrow v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$.

Velikost toku je definována jako $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) = \sum_{e \rightarrow s} f(e)$.

Definice (Tok, velikost toku)

Tok v síti (G, z, s, w) je funkce $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ splňující

- pro všechny hrany $e \in E(G)$ platí $0 \leq f(e) \leq w(e)$,
- pro každý vrchol $v \in V(G) \setminus \{z, s\}$ platí $\sum_{e \rightarrow v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$.

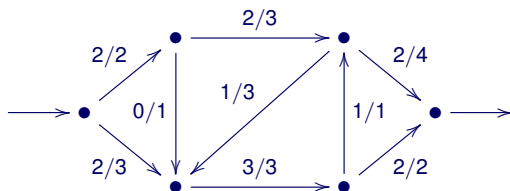
Velikost toku je definována jako $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \rightarrow z} f(e)$.

- První podmínka říká, že tok nesmí překročit kapacitu žádné hrany.
- Druhá podmínka říká, že není-li vrchol zdroj nebo stok, pak z něj musí odtéct tolik materiálu, kolik do něj přitéká.
- Velikost toku se definuje jako množství materiálu odtékajícího ze zdroje po odečtení materiálu, který do zdroje přitéká.
- Velikost toku lze alternativně definovat i u stoku.

Grafické znázornění toku v síti

- Tok v síti znázorňujeme stejně jako síť, akorát ohodnocení každé hrany e bude mít tvar $f(e)/w(e)$, tedy *tok/kapacita*.

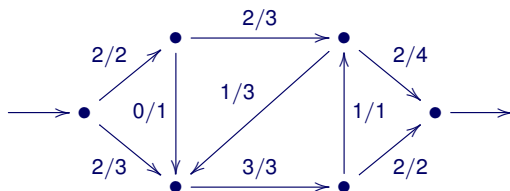
Příklad



Grafické znázornění toku v síti

- Tok v síti znázorňujeme stejně jako síť, akorát ohodnocení každé hrany e bude mít tvar $f(e)/w(e)$, tedy *tok/kapacita*.

Příklad

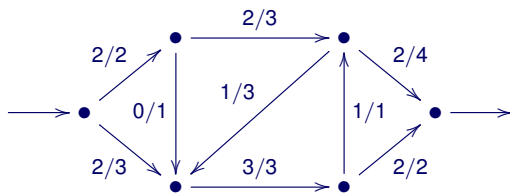


- Jaká je velikost toku?

Grafické znázornění toku v síti

- Tok v síti znázorňujeme stejně jako síť, akorát ohodnocení každé hrany e bude mít tvar $f(e)/w(e)$, tedy *tok/kapacita*.

Příklad



- Jaká je velikost toku?
- Velikost je 4.

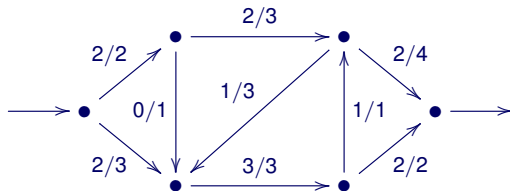
Problém maximálního toku

Problém maximálního toku v síti

Nechť (G, z, s, w) je síť. Problémem maximálního toku v síti rozumíme úkol nalézt v dané síti tok f s maximální možnou velikostí $\|f\|$.

Příklad

- Je vyznačený tok maximální?



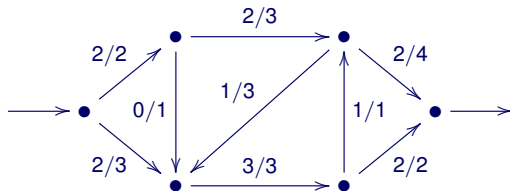
Problém maximálního toku

Problém maximálního toku v síti

Nechť (G, z, s, w) je síť. Problémem maximálního toku v síti rozumíme úkol nalézt v dané síti tok f s maximální možnou velikostí $\|f\|$.

Příklad

- Je vyznačený tok maximální?
- Ne. Najděte maximální tok.



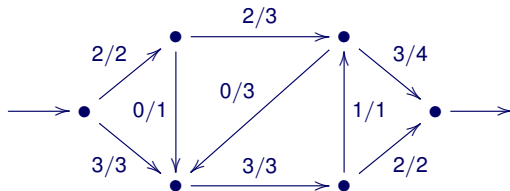
Problém maximálního toku

Problém maximálního toku v síti

Nechť (G, z, s, w) je síť. Problémem maximálního toku v síti rozumíme úkol nalézt v dané síti tok f s maximální možnou velikostí $\|f\|$.

Příklad

- Je vyznačený tok maximální?
- Není. Najděte maximální tok.
- Umíte dokázat, že je velikost toku je maximální?



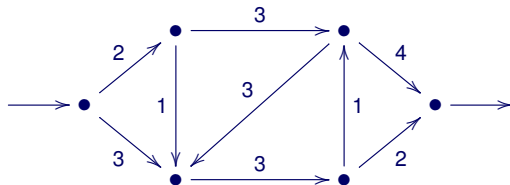
Definice (Řez, velikost řezu)

Řez v síti (G, z, s, w) je podmnožina hran $C \subseteq E(G)$ taková, že po jejich odstranění z grafu G neexistuje orientovaná cesta ze z do s .

Velikost řezu C je součet kapacit hran v C , tedy $\|C\| = \sum_{e \in C} w(e)$.

Příklad

- Nalezněte nějaký řez a určete jeho velikost.



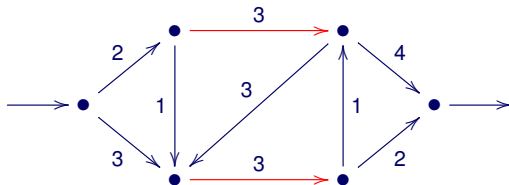
Definice (Řez, velikost řezu)

Řez v síti (G, z, s, w) je podmnožina hran $C \subseteq E(G)$ taková, že po jejich odstranění z grafu G neexistuje orientovaná cesta ze z do s .

Velikost řezu C je součet kapacit hran v C , tedy $\|C\| = \sum_{e \in C} w(e)$.

Příklad

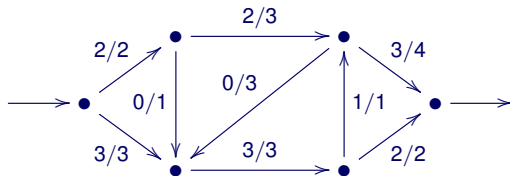
- Nalezněte nějaký řez a určete jeho velikost.
- Vyznačený řez má velikost 6.



Věta

Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.

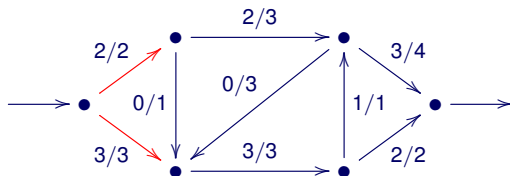
- Intuitivně platí, že řez je množina hran, které nelze obejít žádnou cestou ze zdroje do stoku.
- Velikost libovolného řezu je tedy větší nebo rovna velikosti libovolného toku.
- K důkazu, že nalezený tok má maximální velikost, stačí nalézt řez stejné velikosti.
- Je daný tok v síti maximální?



Věta

Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.

- Intuitivně platí, že řez je množina hran, které nelze obejít žádnou cestou ze zdroje do stoku.
- Velikost libovolného řezu je tedy větší nebo rovna velikosti libovolného toku.
- K důkazu, že nalezený tok má maximální velikost, stačí nalézt řez stejné velikosti.
- Je daný tok v síti maximální?

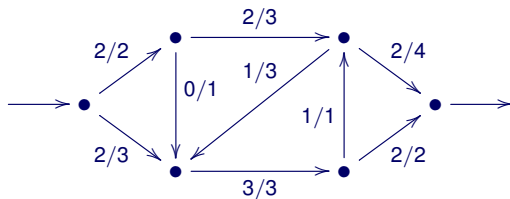


Definice (Nenasycená cesta)

Mějme síť (G, z, s, w) a v ní tok f . **Nenasycená cesta** z vrcholu u do vrcholu v je neoreintovaná cesta (tj. posloupnost navazujících hran e_1, e_2, \dots, e_n chápaných neorientovaně) z u do v , kde pro všechny hrany e_i ve směru z u do v platí $f(e_i) < w(e_i)$ a pro všechny hrany e_i v opačném směru platí $f(e_i) > 0$.

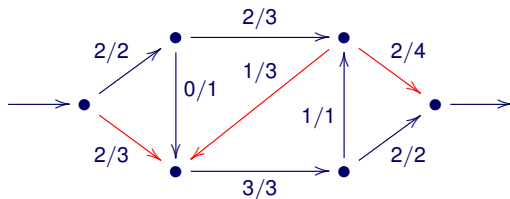
- Po nenasycené cestě lze přepravit více materiálu z u do v .
- **Rezerva kapacity** pro hranu e_i ve směru z u do v je dána rozdílem $w(e_i) - f(e_i)$. Pro hranu v opačném směru je rezerva kapacity přímo $f(e_i)$.

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s ?



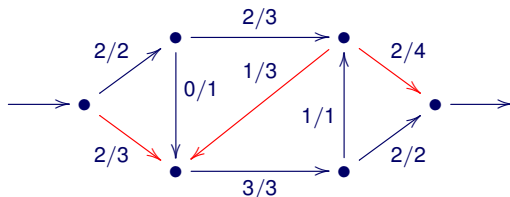
Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s ?
- Ano.



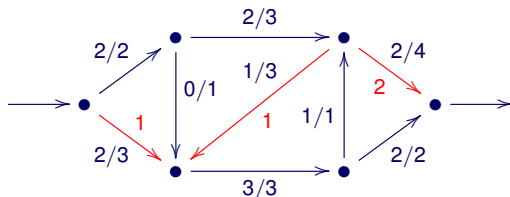
Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s ?
- Ano.
- Určete rezervu kapacity jednotlivých hran.



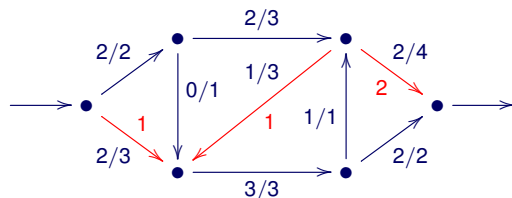
Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s ?
- Ano.
- Určete rezervu kapacity jednotlivých hran.



Příklad

- Existuje v daném toku v síti nenasycená cesta ze z do s ?
- Ano.
- Určete rezervu kapacity jednotlivých hran.



- Tok v síti lze vždy zvýšit o minimální rezervu na nenasycené cestě ze zdroje do stoku.

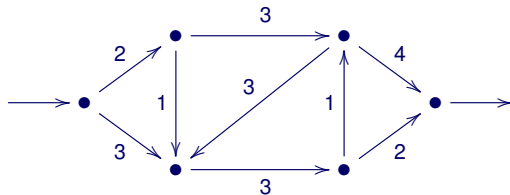
Ford-Fulkersonův algoritmus

Vstup: Síť (G, z, s, w)

- 1 pro všechny hrany $e \in E(G)$ nastav $f(e) = 0$
- 2 **repeat**
- 3 najděme množinu U všech vrcholů,
do kterých vedou nenasycené cesty ze z
- 4 **if** $s \in U$ **then**
- 5 tok na nalezené nenasycené cestě ze z do s zvýšíme
o minimální rezervu kapacity hran na této cestě.
- 6 **until** $s \notin U$
- 7 na výstup vypíšeme získaný tok

Příklad

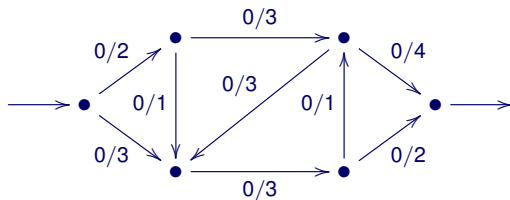
Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

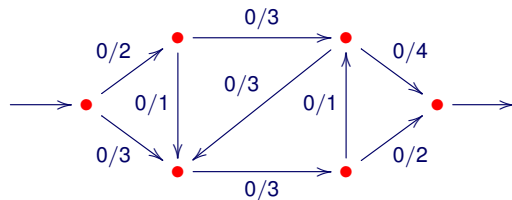
- 1 Inicializujeme tok na nulové hodnoty.



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

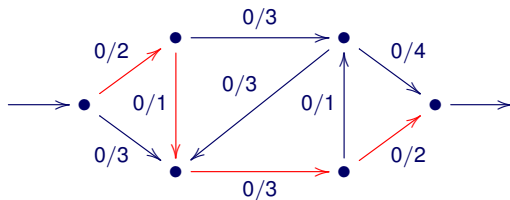
- 1 Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
- 2 Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze z .



Příklad

Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

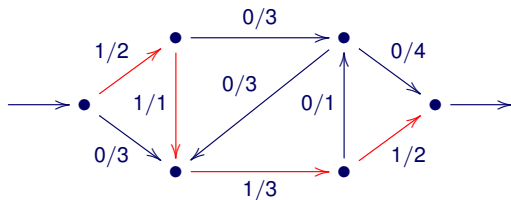
- 1 Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
- 2 Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze z .
- 3 Zvolíme nějakou nenasycenou cestu ze z do s .



Příklad

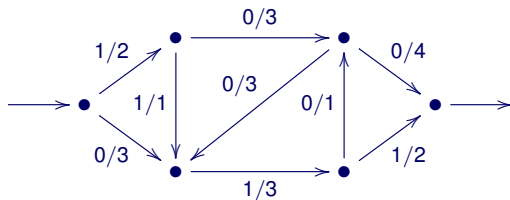
Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

- 1 Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
- 2 Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze z .
- 3 Zvolíme nějakou nenasycenou cestu ze z do s .
- 4 Zvýšíme tok o minimální rezervu kapacity hran na cestě.



Pomocí Ford-Fulkersonova algoritmu spočítejte maximální tok.

- 1 Inicializujeme tok na nulové hodnoty.
- 2 Spočítáme množinu uzlů, kam vedou nenasycené cesty ze z .
- 3 Zvolíme nějakou nenasycenou cestu ze z do s .
- 4 Zvýšíme tok o minimální rezervu kapacity hran na cestě.
- 5 Kroky 2–4 opakujeme dokud je s v množině počítané krokem 2.



- Síť lze snadno rozšířit i o kapacitu uzlů.
- Má smysl uvažovat i minimální kapacity hran, úloha je stále snadno řešitelná.
- Algoritmus pro nalezení maximálního toku má kromě zjevných technických aplikací i aplikace v matematice, např. pro nalezení párování v bipartitním grafu nebo pro určení vyšší grafové souvislosti.