1) Je následující výroková formule splnitelná, tautologie, kontradikce? $A = ((x \wedge y) \vee z) \to (x \wedge z)$

x	y	z	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \vee z$	$x \wedge z$	A
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1

splnitelná: ANO
existuje ohodnocení
I_1: $I_1(x) = 1 = I_1(y) = I_1(z)$
takové, že valuace $I_1'(A) = 1$

tautologie: NE
pro ohodnocení
I_2: $I_2(x) = 1 = I_2(y)$, $I_2(z) = 0$
je valuace $I_2(A) = 0$

kontradikce: NE
protože je splnitelná

---

2) Je následující predikátová formule splnitelná, tautologie, kontradikce? P je unární predikátový symbol.

$B = (\exists y)(\forall x)(x \in P \to y \in P)$ [ekvivalentní zápis $(\exists y)(\forall x)(P(x) \to P(y))$]

Vezmu nějakou realizaci R_1

např. doména $M_{R_1} = \{1, 2, 3\}$

unární relace $P_{R_1} = \{1\} \subseteq M_{R_1}$

volbou $y = 1$ vidím, že B je pravdivá
v realizaci R_1

(ke splnitelnosti stačí pro libovolnou doménu M a neprázdnou $P_R \subseteq M$
uvážit libovolné $y \in P_R$).

Zůstává tedy vyšetřit pravdivost v realizacích R takových, že $P_R = \emptyset$.

Je-li $M \neq \emptyset$, je formule pravdivá volbou $y \in M$ libovolné.

Zbývá realizace R_0: $M_{R_0} = \emptyset$, $P_{R_0} = \emptyset$. Zde neexistuje žádné $y \in M_{R_0}$, tedy formule B není pravdivá v realizace R_0.

Protože B je pravdivá v R_1, je B splnitelná a není kontradikce. Protože navíc B není pravdivá v R_0 není B tautologie.

---

(3) Na množině $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ je dána relace R pro každé $x, y \in M$: $(x,y) \in R$, jestliže $\exists$ (existuje $k \in \mathbb{N}$:) $x = 2ky$ nebo $x = y$. Jedná se o uspořádání/ekvivalenci? Pokud se jedná o uspořádání nakreslete Hasseův diagram uspořádané množiny (M, R), je-li R ekvivalence určete, se kterými prvky je v relaci prvek 4.

R je reflexivní díky podmínce $(x,y) \in R$, jestliže $x = y$.

R není symetrická: $(2,1) \in R$, protože $2 = 2 \cdot 1 \cdot 1$ (k), ale

$(1,2) \notin R$, protože $1 = 2 \cdot k \cdot 2$ má řešení

$k = \frac{1}{4} \notin \mathbb{N}$

c

R je tranzitivní, předpokládejme, že

$(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R$, ~~potom~~ potom mohou nastat čtyři

případy:

(i) $a=b \wedge b=c \Longrightarrow a=c$, tj. $(a,c)\in R$

(ii) $a=b \wedge b=2kc \Longrightarrow a=2kc$, tj. $(a,c)\in R$

(iii) $a=2lb \wedge b=c \Longrightarrow a=2lc$, tj. $(a,c)\in R$

(iv) $a=2pb \wedge b=2qc \Longrightarrow a=2pb=2p2qc=2\underbrace{(2pq)}_{\in N}\cdot c$, tj. $(a,c)\in R$

R je antisymetrická, předpokládejme, že

$(a,b)\in R \wedge (b,a)\in R$, potom mohou nastat

čtyři případy:

(i) $a=b \wedge b=a$, celkem $a=b$, což jsme chtěli

(ii) $a=b \wedge b=2ka$, nesmysl, takto to být nemůže, neboť $k\in N$

(iii) $a=2lb \wedge b=a$, jako ve (ii)

(iv) $a=2pb \wedge b=2qa$, potom $a=2pb=2p2qa$, tedy $4pq=1$, nesmysl, tento případ také nastat nemůže

jedná se o uspořádání - reflexivní, antisymetrická, tranzitivní

Abych nakreslil Hasseův diagram podívám se, jaké prvky jsou spolu v relaci:

co je větší než 1? $(1,x) \in R$, jestliže $1 = 2kx$ nemá řešení, tedy 1 je maximální prvek

co je větší než 2? $(2,x) \in R$: $2 = 2kx$ $k=1, x=1$

$(2,1) \in R$

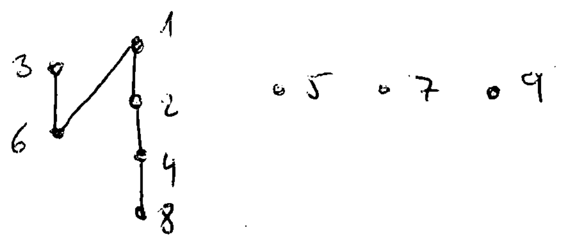
3 $(3,x) \in R$: $3 = 2kx$ NIC

⋮

6 $(6,x) \in R$: $6 = 2 \cdot k \cdot x$ $2 \cdot 3 \cdot 1$

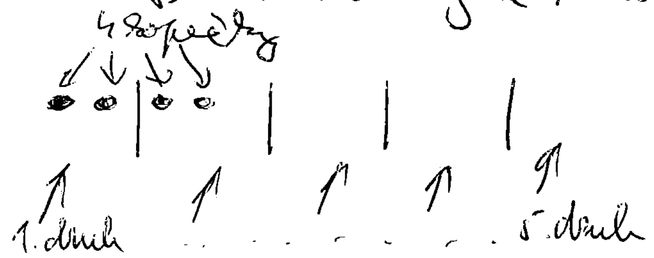
$2 \cdot 1 \cdot 3$

$(6,1) \in R$, $(6,3) \in R$



(4) Jaká je pravděpodobnost, že náhodně dostanu do misky aspoň dva stejné kopečky zmrzliny, jestliže jsem si objednal 4 kopečky a mají 5 druhů?

počet všech možných misek, které mohu dostat



jednoznačně tato posloupnost čtyř • a čtyř | odpovídá misce se 4 kopečky

Těchto posloupností je

$$\frac{(4+4)!}{4!\cdot 4!}$$

počet

počet 1

Počet příznivých případů pro jev "jsou aspoň dva kopečky stejného druhu" je roven počtu všech mínus "všechny kopečky různého druhu", těch je 5, neboť to přesně odpovídá tomu, že jeden z pěti druhů nedostanu.

Tedy výsledná pravděpodobnost je

$$\frac{\frac{8!}{4!\cdot 4!}-5}{\frac{8!}{4!\cdot 4!}}$$

5) Řešte SLR

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 2x-y-z&=-4\\ 3x+2y+2z&=1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 2&-1&-1&-4\\ 3&2&2&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&-3&-3&-6\\ 0&-1&-1&-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&-3&-3&-6\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$$

$z=t$ … ve třetím sloupci není pivot

$$y=\frac{-6+3\cdot t}{-3}=2-t$$

$$x=\frac{1-t-(2-t)}{1}=-1$$

řešení $\{(-1,2-t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$