Algebra II – jaro 2017 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Popište svaz podalgeber algebry $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je binární operace definovaná předpisem

$$a * b = \begin{cases} a - b & \text{pokud } a \cdot b > 0, \\ 1 & \text{pokud } a \cdot b < 0, \\ a & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou třídy izomorfismu konečných svazů, přičemž třída svazu K je menší nebo rovna třídě svazu L právě tehdy, když K je izomorfní podsvazu L. Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je svaz.

3. **(5 bodů)** Uvažujme uspořádanou množinu, jejímiž prvky jsou největší prvek $\top$, nejmenší prvek $\bot$ a všechny dvojice (A, B), kde $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}$, na nichž je uspořádání dáno předpisem

$$(A, B) \leq (C, D) \quad \iff \quad A \subseteq C \text{ a } B \supseteq D.$$

Rozhodněte, zda tato uspořádaná množina je úplný svaz.

4. **(5 bodů)** Rozhodněte, zda uspořádaná množina

$$(\{\, \rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \forall a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N} \colon (a, b) \in \rho \,\} \cup \{\emptyset\}, \subseteq)$$

je algebraický svaz.

5. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis

$$\varphi \sim \psi \quad \iff \quad \forall M \subseteq \mathbb{R} \colon |\varphi(M)| = |\psi(M)|$$

definuje kongruenci $\sim$ algebry $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \kappa, \lambda, \mu, \nu)$, kde κ, λ, μ a ν jsou unární operace definované pro $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}$ předpisy $\kappa(\varphi)(r) = \varphi(r^2)$, $\lambda(\varphi)(r) = \varphi(r^3)$, $\mu(\varphi)(r) = (\varphi(r))^2$ a $\nu(\varphi)(r) = (\varphi(r))^3$.

6. **(10 bodů)** Uvažujme typ algeber sestávající z unárních operačních symbolů f a g. Rozhodněte, která z následujících identit je splněna v algebře $\mathcal{A}$ s nosnou množinou $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ a s operacemi definovanými pro libovolnou relaci $\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ předpisy $f^{\mathcal{A}}(\rho) = \rho^{-1}$ a

$$g^{\mathcal{A}}(\rho) = \{\, (a, b) \in \rho \mid \exists c \in \mathbb{N} \colon (c, a) \in \rho \,\}.$$

a) $f(g(f(g(x)))) = g(f(g(f(x))))$,
b) $g(f(g(g(x)))) = g(g(f(g(x))))$.

7. **(15 bodů)** Rozhodněte, na které z operátorů H, S a P je uzavřená třída všech průsekových polosvazů, v nichž žádné dva nesrovnatelné prvky nemají supremum.