Matematika IV – 6. týden
Lineární kódy

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

jaro 2017

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- W. J. Gilbert, W. K. Nicholson, Modern algebra with applications, 2nd ed. John Wiley and Sons (Pure and applied mathematics) ISBN 0-471-41451-4

Plán přednášky

Při přenosu informace zpravidla dochází k její deformaci. Budeme pro jednoduchost pracovat s modelem, kdy jednotlivé částečky informace jsou buď nuly nebo jedničky (tj. prvky v $\mathbb{Z}_2$) a přenášíme slova o k bitech. Obdobné postupy jsou možné nad konečnými poli.

Při přenosu informace zpravidla dochází k její deformaci. Budeme pro jednoduchost pracovat s modelem, kdy jednotlivé částečky informace jsou buď nuly nebo jedničky (tj. prvky v $\mathbb{Z}_2$) a přenášíme slova o k bitech. Obdobné postupy jsou možné nad konečnými poli. Přenosové chyby chceme

1. rozpoznávat
2. opravovat

a za tím účelem přidáváme dodatečných $n - k$ bitů informace pro pevně zvolené $n > k$.

Při přenosu informace zpravidla dochází k její deformaci. Budeme pro jednoduchost pracovat s modelem, kdy jednotlivé částečky informace jsou buď nuly nebo jedničky (tj. prvky v $\mathbb{Z}_2$) a přenášíme slova o k bitech. Obdobné postupy jsou možné nad konečnými poli. Přenosové chyby chceme

1. rozpoznávat
2. opravovat

a za tím účelem přidáváme dodatečných $n - k$ bitů informace pro pevně zvolené $n > k$.
Všech slov o k bitech je 2^k a každé z nich má jednoznačně určovat jedno **kódové slovo** z 2^n možných. Máme tedy ještě

$$2^n - 2^k = 2^k(2^{n-k} - 1)$$

slov, které jsou chybové. Lze tedy tušit, že pro veliké k nám i malý počet přidaných bitů dává hodně redundantní informace.

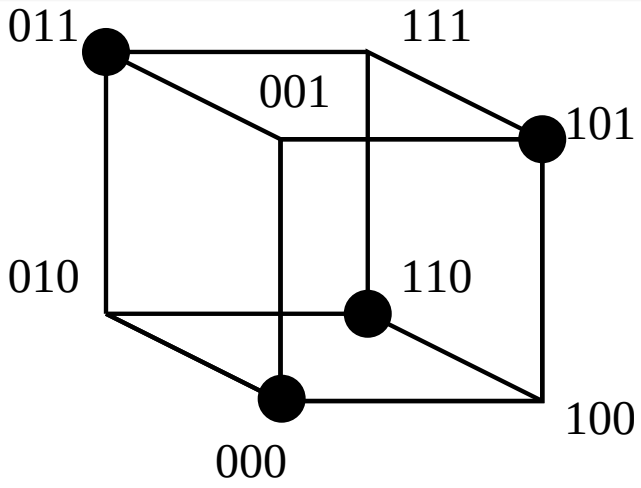
Úplně jednoduchým příkladem je **kód kontrolující paritu**. Kódové slovo o $k + 1$ bitech je určené tak, aby přidáním prvního bitu byl zaručen sudý počet jedniček ve slově.

Úplně jednoduchým příkladem je **kód kontrolující paritu**. Kódové slovo o $k + 1$ bitech je určené tak, aby přidáním prvního bitu byl zaručen sudý počet jedniček ve slově.
Pokud při přenosu dojde k lichému počtu chyb, přijdeme na to. Dvě různá kódová slova se při tomto kódu vždy liší alespoň ve dvou pozicích, chybové slovo se ale od dvou různých kódových slov liší pouze v pozici jedné. Nemůžeme proto umět chyby opravovat ani kdybychom věděli, že došlo k právě jedné.

Úplně jednoduchým příkladem je **kód kontrolující paritu**. Kódové slovo o $k + 1$ bitech je určené tak, aby přidáním prvního bitu byl zaručen sudý počet jedniček ve slově.
Pokud při přenosu dojde k lichému počtu chyb, přijdeme na to. Dvě různá kódová slova se při tomto kódu vždy liší alespoň ve dvou pozicích, chybové slovo se ale od dvou různých kódových slov liší pouze v pozici jedné. Nemůžeme proto umět chyby opravovat ani kdybychom věděli, že došlo k právě jedné.
Navíc neumíme detekovat tak obvyklé chyby, jako je záměna dvou sousedních hodnot ve slově.

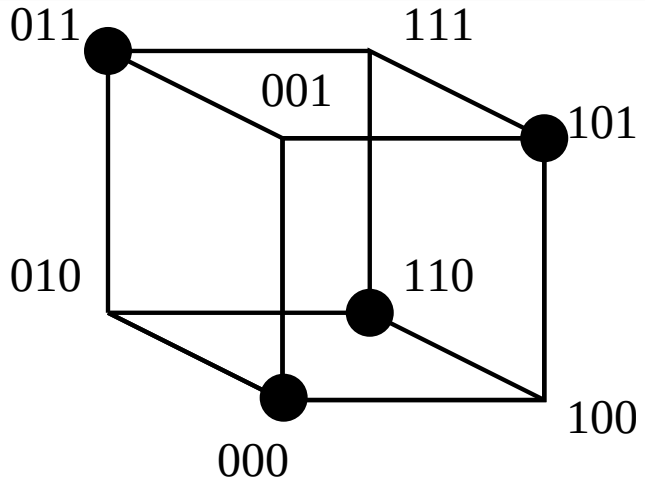
Definition

Hammingova vzdálenost dvou slov je rovna počtu bitů, ve kterých se liší.



Definition

Hammingova vzdálenost dvou slov je rovna počtu bitů, ve kterých se liší.



Theorem

1. *Kód odhaluje r a méně chyb právě, když je minimální Hammingova vzdálenost kódových slov právě $r + 1$.*
2. *Kód opravuje r a méně chyb právě, když je minimální Hammingova vzdálenost kódových slov právě $2r + 1$.*

Plán přednášky

Jak konstruovat kódová slova, abychom je snadno rozpoznali? Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3, 1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.

Jak konstruovat kódová slova, abychom je snadno rozpoznali?
Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3, 1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.
Docela systematickou cestou je využití dělitelnosti polynomů.
Zpráva $b_0 b_1 \dots b_{k-1}$ je reprezentována jako polynom $m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{k-1} x^{k-1}$.

Jak konstruovat kódová slova, abychom je snadno rozpoznali?
Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3, 1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.
Docela systematickou cestou je využití dělitelnosti polynomů.
Zpráva $b_0 b_1 \dots b_{k-1}$ je reprezentována jako polynom $m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{k-1} x^{k-1}$.

Definition

Nechť $p(x) = a_0 + \cdots + a_{n-k} x^{n-k} \in \mathbb{Z}_2[x]$ je polynom s $a_0 = 1$, $a_{n-k} = 1$. **Polynomiální kód generovaný polynomem** $p(x)$ je (n, k)–kód jehož slova jsou polynomy stupně menšího než n dělitelné $p(x)$.

Jak konstruovat kódová slova, abychom je snadno rozpoznali?
Kontrolu parity jsme už viděli, další triviální možnost je prosté opakování bitů – např. $(3, 1)$–kód bere jednotlivé bity a posílá je třikrát po sobě.
Docela systematickou cestou je využití dělitelnosti polynomů.
Zpráva $b_0 b_1 \dots b_{k-1}$ je reprezentována jako polynom $m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{k-1} x^{k-1}$.

Definition

Nechť $p(x) = a_0 + \cdots + a_{n-k} x^{n-k} \in \mathbb{Z}_2[x]$ je polynom s $a_0 = 1$, $a_{n-k} = 1$. **Polynomiální kód generovaný polynomem** $p(x)$ je (n, k)–kód jehož slova jsou polynomy stupně menšího než n dělitelné $p(x)$.
Zpráva $m(x)$ je zakódována jako $v(x) = r(x) + x^{n-k} m(x)$, kde $r(x)$ je zbytek po dělení polynomu $x^{n-k} m(x)$ polynomem $p(x)$.

Z definice víme

$$v(x) = x^{n-k} m(x) + r(x) = q(x)p(x) + r(x) + r(x) = q(x)p(x).$$

Budou tedy všechna kódová slova dělitelná $p(x)$.

Z definice víme

$$v(x) = x^{n-k} m(x) + r(x) = q(x)p(x) + r(x) + r(x) = q(x)p(x).$$

Budou tedy všechna kódová slova dělitelná $p(x)$.
Původní zpráva je obsažena přímo v polynomu $v(x)$, takže dekódování správného slova je snadné.

Z definice víme

$$v(x) = x^{n-k} m(x) + r(x) = q(x)p(x) + r(x) + r(x) = q(x)p(x).$$

Budou tedy všechna kódová slova dělitelná $p(x)$.
Původní zpráva je obsažena přímo v polynomu $v(x)$, takže dekódování správného slova je snadné.

Example

1. Polynom $p(x) = 1 + x$ generuje $(n, n-1)$–kód kontroly parity pro všechna $n \geq 3$.
2. Polynom $p(x) = 1 + x + x^2$ generuje $(3, 1)$–kód opakování bitů.

První tvrzení plyne z toho, že $1 + x$ dělí polynom $v(x)$ tehdy a jen tehdy, když $v(1) = 0$ a to nastane tehdy, když je ve $v(x)$ sudý počet nenulových koeficientů. Druhé je zřejmé.

Přenos slova $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ dopadne příjmem polynomu

$$u(x) = v(x) + e(x)$$

kde $e(x)$ je tzv. **chybový polynom** repzentující vektor chyby přenosu.

Přenos slova $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ dopadne příjmem polynomu

$$u(x) = v(x) + e(x)$$

kde $e(x)$ je tzv. **chybový polynom** repzentující vektor chyby přenosu.
Chyba je rozpoznatelná pouze, když generátor kódu $p(x)$ nedělí $e(x)$. Máme proto zájem o polynomy, které které nevystupují jako dělitelé zbytečně často.

Přenos slova $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ dopadne příjmem polynomu

$$u(x) = v(x) + e(x)$$

kde $e(x)$ je tzv. **chybový polynom** repzentující vektor chyby přenosu.
Chyba je rozpoznatelná pouze, když generátor kódu $p(x)$ nedělí $e(x)$. Máme proto zájem o polynomy, které které nevystupují jako dělitelé zbytečně často.

Definition

Ireducibilní polynom $p(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ stupně m se nazývá **primitivní**, jestliže $p(x)$ dělí polynom $(1 + x^k)$ pro $k = 2^m - 1$ ale nedělí jej pro žádná menší k.

Theorem

Je-li $p(x)$ primitivní polynom stupně m, pak pro všechna $n \leq 2^m - 1$ rozpoznává příslušný $(n, n - m)$–kód všechny jednoduché a dvojité chyby.

Theorem

Je-li $p(x)$ primitivní polynom stupně m, pak pro všechna $n \leq 2^m - 1$ rozpoznává příslušný $(n, n - m)$–kód všechny jednoduché a dvojité chyby.

Corollary

Je-li $q(x)$ primitivní polynom stupně m, pak pro všechna $n \leq 2^m - 1$ rozpoznává $(n, n - m - 1)$–kód generovaný polynomem $p(x) = q(x)(1 + x)$ všechny dvojité chyby a všechna slova s lichým počtem chyb.

Tabulka dává o informace o výsledcích předchozích dvou vět pro několik polynomů:

Tabulka dává o informace o výsledcích předchozích dvou vět pro několik polynomů:

primitivní polynom	kontrolní bity	délka slova
$1 + x + x^2$	2	3
$1 + x + x^3$	3	7
$1 + x + x^4$	4	15
$1 + x^2 + x^5$	5	31
$1 + x + x^6$	6	63
$1 + x^3 + x^7$	7	127
$1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^8$	8	255
$1 + x^4 + x^9$	9	511
$1 + x^3 + x^{10}$	10	1023

Nástroje pro konstrukci primitivních polynomů dává teorie konečných polí. Souvisí s tzv. primitivními prvky v Galoisových polích $G(2^m)$.

Nástroje pro konstrukci primitivních polynomů dává teorie konečných polí. Souvisí s tzv. primitivními prvky v Galoisových polích $G(2^m)$.
Ze stejné teorie lze také dovodit příjemnou realizaci dělení se zbytkem (tj.) ověřování, zda je přijaté slovo kódové, pomocí zpožďovacích registrů. Jde o jednoduchý obvod s tolika prvky, kolik je stupeň polynomu.

Plán přednášky

Definition

Lineární kód je injektivní lineární zobrazení $g : (\mathbb{Z}_2)^k \to (\mathbb{Z}_2)^n$. Matice G typu n/k reprezentující toto zobrazení v standardních bazích se nazývá generující **matice kódu**.

Definition

Lineární kód je injektivní lineární zobrazení $g : (\mathbb{Z}_2)^k \to (\mathbb{Z}_2)^n$. Matice G typu n/k reprezentující toto zobrazení v standardních bazích se nazývá generující **matice kódu**.

Pro každé slovo u je

$$v = G \cdot u$$

příslušné kódové slovo.

Theorem

Každý polynomiální (n, k)–kód je lineární kód.

Theorem

Každý polynomiální (n, k)–kód je lineární kód.

Matice příslušná k polynomu $p(x) = 1 + x + x^3$ a jím určenému $(6, 3)$–kódu je

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Theorem

Je-li $g : (\mathbb{Z}_2)^k \to (\mathbb{Z}_2)^n$ *lineární kód s (blokově zapsanou) maticí*

$$G = \begin{pmatrix} P \\ \mathbb{I}_k \end{pmatrix},$$

potom zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^{n-k}$ *s maticí*

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-k} & P \end{pmatrix}$$

má následující vlastnosti

1. $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$
2. *Přijaté slovo* $v = G \cdot u$ *je kódové slovo právě, když je* $H \cdot v = 0$.

Theorem

Je-li $g : (\mathbb{Z}_2)^k \to (\mathbb{Z}_2)^n$ *lineární kód s (blokově zapsanou) maticí*

$$G = \begin{pmatrix} P \\ \mathbb{I}_k \end{pmatrix},$$

potom zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^{n-k}$ *s maticí*

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-k} & P \end{pmatrix}$$

má následující vlastnosti

1. $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$
2. *Přijaté slovo* $v = G \cdot u$ *je kódové slovo právě, když je* $H \cdot v = 0$.

Matici H z věty se říká **matice kontroly parity** přílušného (n, k)–kódu.

Jak jsme viděli, přenos zprávy u dává výsledek

$$v = u + e.$$

To je ale nad $\mathbb{Z}_2$ ekvivalentní $e = u + v$.

Jak jsme viděli, přenos zprávy u dává výsledek

$$v = u + e.$$

To je ale nad $\mathbb{Z}_2$ ekvivalentní $e = u + v$.
Pokud tedy známe vektorový podprostor $V \subset (\mathbb{Z}_2)^n$ správných kódových slov, víme u každého výsledku, že správné slovo se něj liší o případnou chybu, která je ve třídě rozkladu $v + V$ ve faktorovém vektorovém prostoru $(\mathbb{Z}_2)^n/V$.
Zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^{n-k}$ zadané maticí kontroly parity má V za jádro, proto indukuje injektivní lineární zobrazení $h : (\mathbb{Z}_2)^n/V \to (\mathbb{Z}_2)^{n-k}$. Jeho hodnoty jsou jednoznačně určeny hodnotami $H \cdot u$.

Hodnota $H \cdot u$, kde H je matice kntroly parity pro lineární kód, se nazývá **syndrom** slova u v tomto kódu.

Samozřejmým důsledkem této konstrukce je následující tvrzení.

Theorem

Dvě slova jsou ve stejné třídě rozkladu $v + V$ právě, když sdílí syndrom.

Samoopravné kódy lze konstruovat tak, že pro každý syndrom určíme prvek v příslušné třídě, který je nejvhodnějším slovem.