Rozhodnutelnost problémů podle tříd jazyků

Problém	Reg	DCF	CF	CS	Rec	RE
Je $w \in L(\mathcal{G})$?						
Je $L(\mathcal{G})$ prázdný?						
Je $L(\mathcal{G})$ konečný?						
Je $L(\mathcal{G}) = \Sigma^*$?						
Je $L(\mathcal{G}) = R$ (R je regulární)?						
Je $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$?						
Je $L(\mathcal{G}_1) \subseteq L(\mathcal{G}_2)$?						
Je $L(\mathcal{G})$ regulární?						

R = rozhodnutelný
N = nerozhodnutelný
ano = algoritmus vždy vrátí ano

Rozhodnutelnost problémů podle tříd jazyků

Problém	Reg	DCF	CF	CS	Rec	RE
Je *průnik* dvou jazyků téhož typu?						
Je *sjednocení* dvou jazyků téhož typu?						
Je *komplement* jazyka téhož typu?						
Je *zřetězení* dvou jazyků téhož typu?						
Je gramatika $\mathcal{G}$ *víceznačná*?						

R = rozhodnutelný
N = nerozhodnutelný
ano = algoritmus vždy vrátí ano

Problém prázdnosti

Věta 5.23. Problém prázdnosti pro třídu bezkontextových gramatik je *rozhodnutelný*.

Důkaz. Je obsažen v důkazu věty 3.9. □

Postův korespondenční problém (připomenutí)

Postův korespondenční problém. Pro dané dva seznamy slov

$$A = (x_1, \dots, x_n)$$
$$B = (y_1, \dots, y_n)$$

rozhodnout, zda existují čísla $i_1, \dots, i_k$ taková, že

$$x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_k}.$$

Dvojici $\langle A, B \rangle$ nazýváme instancí PCP. Čísla $i_1, \dots, i_k$ nazýváme řešením této instance PCP.

PCP je nerozhodnutelný.

Problém prázdnosti

Věta 5.25. Problém prázdnosti pro třídu kontextových gramatik je *nerozhodnutelný*.

Důkaz. Redukujeme problém na doplněk PCP. Buď dána instance PCP $A = (x_1, \ldots, x_n), B = (y_1, \ldots, y_n)$ nad abecedou Σ. Uvažme jazyky

$$L_A \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$L_B \stackrel{\text{def}}{=}$$

nad abecedou $\Sigma \cup \{\#, 1, \ldots n\}$.

Jazyk $L_A \cap L_B$ je kontextový a je prázdný právě tehdy, pokud instance $\langle A, B\rangle$ nemá řešení:

Redukce instanci $\langle A, B\rangle$ přiřadí CS gramatiku $\mathcal{G}$ generující jazyk $L_A \cap L_B$. $\square$

Problém konečnosti

Věta 5.27. Problém konečnosti pro třídu bezkontextových gramatik je *rozhodnutelný*.

Důkaz. Jako důsledek lemmatu o vkládání pro CFL víme, že $L(\mathcal{G})$ je nekonečný právě tehdy, když obsahuje slovo z délky

$$p < |z| \leqslant p + q.$$

$\square$

Problém konečnosti

Věta 5.28. Problém konečnosti pro třídu kontextových gramatik je *nerozhodnutelný*.

Důkaz. Pokud má PCP řešení, má jich nekonečně mnoho:

Tedy jazyk $L_A \cap L_B$ je konečný právě tehdy, pokud instance $\langle A, B \rangle$ PCP nemá řešení. $\square$

Pár pomocných jazyků

Buď $A = (x_1, \ldots, x_n)$, $B = (y_1, \ldots, y_n)$ instance PCP. Definujeme

$$L_A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_{i_1} \ldots x_{i_k} \# i_k \ldots i_1 \mid k \geqslant 1 \text{ a } 1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ pro každé } 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

$$L_B \stackrel{\text{def}}{=} \{y_{i_1} \ldots y_{i_k} \# i_k \ldots i_1 \mid k \geqslant 1 \text{ a } 1 \leqslant i_j \leqslant n \text{ pro každé } 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

$$L_{A,B} \stackrel{\text{def}}{=} L_A \cdot \{\#\} \cdot L_B^R$$

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{u \# v \# v^R \# u^R \mid u \in \Sigma^*, v \in \{1, \ldots, n\}^*\}$$

Všechny tyto jazyky jsou deterministické bezkontextové.

Pár vlastností pár pomocných jazyků

Lemma 5.30. Instance $\langle A, B\rangle$ PCP má řešení, právě když $L_{A,B} \cap S \neq \emptyset$.

Důkaz.

$\square$

Pár vlastností pár pomocných jazyků

Lemma 5.31. Jazyk $co-(L_{A,B} \cap S)$ je bezkontextový.

Důkaz. Z De Morganových vztahů víme, že

$$co-(L_{A,B} \cap S) =$$

Jazyky $L_{A,B}$ a S jsou , a tedy jazyky $co-L_{A,B}$ a $co-S$ jsou také .

Tím spíše jsou také .

Tudíž jazyk $co-(L_{A,B} \cap S)$ je . $\square$

Pár vlastností pár pomocných jazyků

Lemma 5.32. Jazyk $L_{A,B} \cap S$ je bezkontextový tehdy a jen tehdy, když je prázdný.

Důkaz.

„$\Leftarrow$“:
„$\Rightarrow$“: Sporem. Předpokládejme, že $L = L_{A,B} \cap S$ je a .

Protože L je CFL, z lemmatu o vkládání existuje n takové, že každé slovo $z \in L$ délky $|z| > n$ lze napumpovávat.

Protože L je neprázdný, je , můžeme tedy zvolit slovo

$$z = x_{i_1} \ldots x_{i_k} \# i_k \ldots i_1 \# i_1 \ldots i_k \# y_{i_k} \ldots y_{i_1}$$

pro $k \geqslant n$.

Pro žádné rozdělení z na části u, v, w, x, y splňující podmínky PL ale neplatí $uv^2wx^2y \in L$, což je spor. □

Problém rovnosti s daným regulárním jazykem

Věta 5.33 a). Pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ a daný regulární jazyk R je nerozhodnutelné určit, zda $L(\mathcal{G}) = R$.

Důkaz. Stačí zvolit za $\mathcal{G}$ gramatiku pro jazyk $co{-}(L_{A,B} \cap S)$ a $R = (\Sigma \cup \{\#\} \cup \{1 \ldots n\})^*$.

Pak $L(\mathcal{G}) = R$ právě tehdy, když instance $\langle A, B \rangle$ nemá řešení.

□

Problém inkluze s daným regulárním jazykem

Věta 5.33 b). Pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ a daný regulární jazyk R je nerozhodnutelné určit, zda $L(\mathcal{G}) \supseteq R$.

Důkaz. Víme, že rozhodnout, zda $L(\mathcal{G}) = R$, není rozhodnutelné. Stačí ukázat, že rozhodnout, zda $L(\mathcal{G}) \subseteq R$, je rozhodnutelné.

To je ale jednoduché, protože $L(\mathcal{G}) \subseteq R$ platí právě tehdy, když jazyk

je prázdný. Tento jazyk je ale bezkontextový. $\square$

Problémy rovnosti

Věta 5.34.

a) Pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ s terminální abecedou Σ je nerozhodnutelné určit, zda $L(\mathcal{G}) = \Sigma^*$.

b) Pro dané bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ je nerozhodnutelné určit, zda $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$ a zda $L(\mathcal{G}_1) \subseteq L(\mathcal{G}_2)$.

Důkaz.

a) Stačí za $\mathcal{G}$ vzít gramatiku generující jazyk

b) Stačí za $\mathcal{G}_1$ vzít gramatiku generující jazyk

a za $\mathcal{G}_2$ gramatiku generující jazyk

$\square$

Problémy bezkontextovosti a regularity

Věta 5.35. Pro dané bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ je nerozhodnutelné určit, zda

a) $L(\mathcal{G}_1) \cap L(\mathcal{G}_2)$ je bezkontextový jazyk,

b) $co{-}L(\mathcal{G}_1)$ je bezkontextový jazyk,

c) $L(\mathcal{G}_1)$ je regulární jazyk.

Důkaz.

a) Stačí zvolit bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ takové, že

$$L(\mathcal{G}_1) =$$

$$L(\mathcal{G}_2) =$$

b) Stačí zvolit bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ takovou, že $L(\mathcal{G}_1) =$.

c) To samé jako v b).

Problém víceznačnosti

Věta 5.36. Pro danou bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G}$ je nerozhodnutelné určit, zda je víceznačná.

Důkaz. Buď $A = (x_1, \ldots, x_n), B = (y_1, \ldots, y_n)$ instance PCP.

Zvolme gramatiku $\mathcal{G}$ s pravidly

$$\begin{aligned} P \stackrel{\text{def}}{=} \{S &\to S_1 \mid S_2, \\ S_1 &\to \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \\ S_2 &\to \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \} \end{aligned}$$

Pak gramatika $\mathcal{G}$ je víceznačná právě tehdy, když instance $\langle A, B \rangle$ má řešení. $\square$