1. *(15 bodů)* Na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ definujeme relace R a S pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ předpisy:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in R & \iff & x \cdot y \geq 0 \\ (x,y) \in S & \iff & x \cdot y > 0 \ \text{ nebo } \ x = y = 0 \end{array}$$

   Pro každou relaci rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud se o ekvivalenci nejedná, zdůvodněte proč. Pokud se o ekvivalenci jedná, určete počet tříd rozkladu množiny $\mathbb{Z}$ podle této ekvivalence a tyto třídy popište.

2. *(10 bodů)* Definujte pojmy *zobrazení* a *surjektivní zobrazení*.

3. *(10 bodů)* Nalezněte interpretace dokazující, že predikátová formule $(\forall x)(\exists y)(R(x,y) \wedge \neg R(y,x))$ je splnitelná, ale není tautologií.

4. *(20 bodů)* Vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcl} v + y + z & = & 1 + w \\ 2v + w + y + z & = & 6 \\ 1 + v + y + 2z & = & 2w \end{array}$$

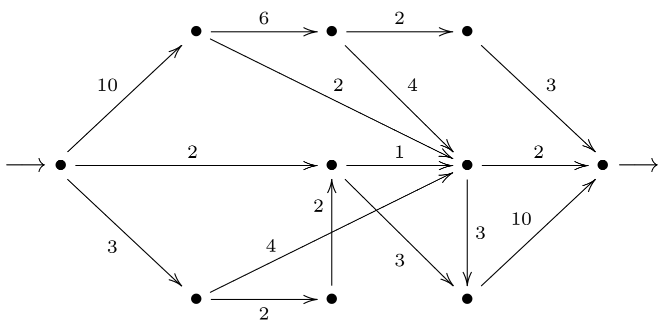
5. *(10 bodů)* Ke zkoušce na vysoké škole dostali studenti seznam 30 otázek. Tři z nich si každý student na začátku zkoušky vylosuje. Karel se 5 otázek nestihl naučit. Jaká je pravděpodobnost, že si u zkoušky vylosuje pouze otázky, které zná?

6. *(15 bodů)* Provedli jsme průzkum atletických schopností studentů FI. Měřili jsme délku hodu diskem. Naměřené výsledky v metrech jsou následující:

$$30, 25, 24, 26, 18, 6, 20, 25, 13, 24$$

   Určete *variační obor* a *rozpětí* datového souboru. Dále uveďte *medián*, *aritmetický průměr* a *rozptyl*.

7. *(20 bodů)* Najděte maximální tok v síti:



1. *(15 bodů)* Na množině $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ definujeme relace R a S pro všechna $x, y \in \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ předpisy:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in R & \iff & x \leq y \text{ a } (x \text{ je sudé nebo } x = y) \\ (x,y) \in S & \iff & x \leq y \text{ a } x \text{ je sudé} \end{array}$$

   Pro každou relaci rozhodněte, zda se jedná o uspořádání. Pokud se o uspořádání nejedná, zdůvodněte proč. Pokud se o uspořádání jedná, nakreslete odpovídající Hasseův diagram.

2. *(10 bodů)* Nalezněte totální zobrazení $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, které bude prosté, ale nebude bijekcí.

3. *(10 bodů)* K formuli $(b \Rightarrow \neg a) \Rightarrow c$ sestrojte ekvivalentní formuli v DNF a ekvivalentní formuli v CNF.

4. *(20 bodů)* Vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 19 + 7z \\ 3x + 2z + 10 & = & 4y + 5x \\ 3x - 10 & = & 1 - 10y - z \end{array}$$

5. *(10 bodů)* Kolika způsoby se může 20 studentů rozdělit do čtyřčlenných týmů?

6. *(20 bodů)* Provedli jsme průzkum publikační činnosti u doktorských studentů FI. Zaznamenávali jsme počet odstudovaných semestrů a počet publikací. Naměřené výsledky ve formě dvojrozměrného datového souboru jsou následující:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 11 \\ 1 & 4 \\ 7 & 6 \\ 7 & 13 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \\ 6 & 28 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

   Spočítejte *aritmetický průměr* a *směrodatné odchylky* obou měřených znaků. Dále spočítejte *koeficient korelace.*

7. *(15 bodů)* Definujte pojmy *tok* v síti (G, z, s, w) a *velikost toku.*

1. *(15 bodů)* Na množině všech celých čísel $\mathbb{N}$ definujeme relace R a S pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ předpisy:

$$\begin{array}{lcl} (x,y) \in R & \iff & x = y \text{ nebo } y = 0 \\ (x,y) \in S & \iff & x = y \text{ nebo } y = 0 \text{ nebo } y = 1 \end{array}$$

Pro každou relaci rozhodněte, zda se jedná o uspořádání. Pokud se o uspořádání nejedná, zdůvodněte proč. Pokud se o uspořádání jedná, určete nejmenší, největší, maximální a minimální prvky množiny $\mathbb{N}$ s tímto uspořádáním.

2. *(10 bodů)* Definujte pojem *rozklad $\mathcal{R}$ množiny A.*

3. *(10 bodů)* Zjistěte, jestli formule $b \vee c$ logicky vyplývá z množiny formulí $\{\neg(a \wedge b), \neg(a \wedge c) \Rightarrow b\}$.

4. *(20 bodů)* Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 19 + 7z \\ 3x + 2z + 10 & = & 4y + 5x \\ 3x + 2y + 5 & = & 5z + x + 7y \end{array}$$

5. *(10 bodů)* Uvažme následující dva jevy při hodu dvěma kostkami.

jev A: "padne součet dělitelný třemi"
jev B: "padne součet alespoň 8"

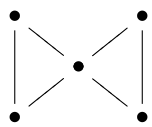
Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$.

6. *(15 bodů)* Provedli jsme průzkum hmotnosti zavazadel studentů studentů FI. Naměřené výsledky jsou v kilogramech:

$$4, 5, 1, 6, 3, 4, 15, 3, 7, 2, 5, 9, 4, 12$$

Určete *variační obor*, *rozpětí*, *modus*, *medián* a *horní a dolní kvartil.*

7. *(20 bodů)* Uvažme následující graf:



   (a) Určete vrcholovou a hranovou souvislost tohoto grafu.
   (b) Kolik různých koster má tento graf? Všechny kostry nakreslete.
   (c) Kolik různých koster má uvedený graf, počítáme-li všechny izomorfní kostry jako jednu?