IB112 Základy matematiky

Základy kombinatoriky a kombinatorická pravděpodobnost

Jan Strejček

Obsah

- *Výběry prvků bez opakování*
  - permutace a faktoriál
  - variace
  - kombinace a kombinační čísla
- *Výběry prvků s opakováním*
  - permutace
  - variace
  - kombinace
- *Obecné principy počítání složených výběrů*
  - princip nezávislých výběrů
  - princip dvojího počítání
- *Kombinatorická pravděpodobnost*
  - konečný pravděpodobnostní prostor
  - nezávislost jevů a podmíněná pravděpodobnost
  - střední hodnota

Výběry prvků bez opakování

Permutace bez opakování

Definice (Permutace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích. Permutace množiny M je uspořádaná posloupnost všech prvků z M.

Příklad

- Vypište všechny permutace množiny $\{a, b, c, d\}$.

Permutace bez opakování

Definice (Permutace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích. Permutace množiny M je uspořádaná posloupnost všech prvků z M.

Příklad

- Vypište všechny permutace množiny $\{a, b, c, d\}$.

$$
\begin{array}{llll}
(a, b, c, d) & (b, a, c, d) & (c, a, b, d) & (d, a, b, c) \\
(a, b, d, c) & (b, a, d, c) & (c, a, d, b) & (d, a, c, b) \\
(a, c, b, d) & (b, c, a, d) & (c, b, a, d) & (d, b, a, c) \\
(a, c, d, b) & (b, c, d, a) & (c, b, d, a) & (d, b, c, a) \\
(a, d, b, c) & (b, d, a, c) & (c, d, a, b) & (d, c, a, b) \\
(a, d, c, b) & (b, d, c, a) & (c, d, b, a) & (d, c, b, a)
\end{array}
$$

Permutace bez opakování

Věta

Počet všech permutací n-prvkové množiny je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Funkce $n!$ se nazývá *faktoriál*. Klademe $0! = 1$.

Příklad

- Kolika způsoby lze v ruce uspořádat 7 karet?

Permutace bez opakování

Věta

Počet všech permutací n-prvkové množiny je

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Funkce $n!$ se nazývá *faktoriál*. Klademe $0! = 1$.

Příklad

- Kolika způsoby lze v ruce uspořádat 7 karet?
- Odpověď je $7! = 5\,040$.

Variace bez opakování

Definice (Variace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k-prvkovou variací na množině M rozumíme uspořádanou k-tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové variace na množině $\{a, b, c, d\}$.

Variace bez opakování

Definice (Variace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k-prvkovou variací na množině M rozumíme uspořádanou k-tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové variace na množině $\{a, b, c, d\}$.

$$\begin{array}{cccc} (a,b) & (b,a) & (c,a) & (d,a) \\ (a,c) & (b,c) & (c,b) & (d,b) \\ (a,d) & (b,d) & (c,d) & (d,c) \end{array}$$

Variace bez opakování

Věta

Počet všech k-prvkových variací na množině s n prvky je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

- Permutace množiny s n prvky je totéž jako n-prvková variace.
- Na množině s n prvky je vždy stejně n-prvkových variací jako $(n-1)$-prvkových variací. (Proč?)

Příklad

- Kolik trojciferných čísel lze sestavit z číslic $1, 2, \ldots, 9$, jestliže se žádné číslice neopakují?

Variace bez opakování

Věta

Počet všech k-prvkových variací na množině s n prvky je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

- Permutace množiny s n prvky je totéž jako n-prvková variace.
- Na množině s n prvky je vždy stejně n-prvkových variací jako $(n-1)$-prvkových variací. (Proč?)

Příklad

- Kolik trojciferných čísel lze sestavit z číslic $1, 2, \ldots, 9$, jestliže se žádné číslice neopakují?
- Odpověď je $\frac{9!}{6!} = 504$.

Kombinace bez opakování

Definice (Kombinace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k-prvkovou kombinací na množině M rozumíme k-prvkovou podmnožinu množiny M.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

Kombinace bez opakování

Definice (Kombinace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k-prvkovou kombinací na množině M rozumíme k-prvkovou podmnožinu množiny M.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

$$
\begin{array}{llll}
\{a, b\} & \{b, c\} & \{c, d\} & \{d, e\} \\
\{a, c\} & \{b, d\} & \{c, e\} & \\
\{a, d\} & \{b, e\} & & \\
\{a, e\} & & &
\end{array}
$$

Kombinace bez opakování

Věta

Počet všech k-prvkových kombinací na množině s n prvky je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

- Čísla $\binom{n}{k}$ se nazývají *kombinační čísla* nebo *binomické koeficienty*.
- k-prvková kombinace se někdy popisuje jako neuspořádaný výběr k prvků.

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout tah Sportky (6 čísel z 49)?

Kombinace bez opakování

Věta

Počet všech k-prvkových kombinací na množině s n prvky je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

- Čísla $\binom{n}{k}$ se nazývají *kombinační čísla* nebo *binomické koeficienty*.
- k-prvková kombinace se někdy popisuje jako neuspořádaný výběr k prvků.

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout tah Sportky (6 čísel z 49)?
- Odpověď je $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

Výběry prvků s opakováním

Permutace s opakováním

Definice (Permutace s opakováním)

Nechť M je konečná množina. Permutace s opakováním je uspořádaná posloupnost prvků z M, v níž se každý prvek $i \in M$ vyskytuje k_i-krát, kde k_i je předem dané.

Příklad

- Vypište všechny permutace s opakováním množiny $\{a, b\}$ pro $k_a = 2$ a $k_b = 3$.

Permutace s opakováním

Definice (Permutace s opakováním)

Nechť M je konečná množina. Permutace s opakováním je uspořádaná posloupnost prvků z M, v níž se každý prvek $i \in M$ vyskytuje k_i-krát, kde k_i je předem dané.

Příklad

- Vypište všechny permutace s opakováním množiny $\{a, b\}$ pro $k_a = 2$ a $k_b = 3$.

$$
\begin{array}{ll}
(a, a, b, b, b) & (b, a, b, a, b) \\
(a, b, a, b, b) & (b, a, b, b, a) \\
(a, b, b, a, b) & (b, b, a, a, b) \\
(a, b, b, b, a) & (b, b, a, b, a) \\
(b, a, a, b, b) & (b, b, b, a, a)
\end{array}
$$

Permutace s opakováním

Věta

Počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ *pro dané počty opakování* $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0$ *je*

$$\frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Příklad

- Kolika způsoby lze navléct na provázek 30 červených, 10 modrých a 3 žluté korále?

Permutace s opakováním

Věta

Počet permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ *pro dané počty opakování* $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0$ *je*

$$\frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Příklad

- Kolika způsoby lze navléct na provázek 30 červených, 10 modrých a 3 žluté korále?
- Odpověď je $\dfrac{(30 + 10 + 3)!}{30! \cdot 10! \cdot 3!} = 10\,460\,978\,576\,048$.

Variace s opakováním

Definice (Variace s opakováním)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k-prvkovou variací s opakováním na množině M rozumíme uspořádanou k-tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

Příklad

- Vypište všechny 4-prvkové variace s opakováním na množině $\{a, b\}$.

Variace s opakováním

Definice (Variace s opakováním)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k-prvkovou variací s opakováním na množině M rozumíme uspořádanou k-tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k-krát.

Příklad

- Vypište všechny 4-prvkové variace s opakováním na množině $\{a, b\}$.

$$\begin{array}{cccc} (a,a,a,a) & (a,b,a,a) & (b,a,a,a) & (b,b,a,a) \\ (a,a,a,b) & (a,b,a,b) & (b,a,a,b) & (b,b,a,b) \\ (a,a,b,a) & (a,b,b,a) & (b,a,b,a) & (b,b,b,a) \\ (a,a,b,b) & (a,b,b,b) & (b,a,b,b) & (b,b,b,b) \end{array}$$

Variace s opakováním

Věta

Počet všech k-prvkových variací s opakováním na množině s n prvky je

$$n^k.$$

Příklad

- Kolik podmnožin má množina $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$?

Variace s opakováním

Věta

Počet všech k-prvkových variací s opakováním na množině s n prvky je

$$n^k.$$

Příklad

- Kolik podmnožin má množina $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$?
- Odpověď je $2^{10} = 1\,024$.
- Podmnožinu lze kódovat jako uspořádanou 10-tici nul a jedniček (jedničky značí, které prvky jsou v podmnožině):

$$\{2, 5, 6\} \text{ odpovídá } (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$$

- Hledáme tedy všechny 10-prvkové variace s opakováním na množině $\{0, 1\}$.

Kombinace s opakováním

Definice (Kombinace s opakováním)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k-prvkovou kombinací s opakováním na množině M rozumíme neuspořádanou k-tici prvků z M, kde se každý prvek vyskytuje libovolněkrát.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace s opakováním na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

Kombinace s opakováním

Definice (Kombinace s opakováním)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k-prvkovou kombinací s opakováním na množině M rozumíme neuspořádanou k-tici prvků z M, kde se každý prvek vyskytuje libovolněkrát.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace s opakováním na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\{a,a\} & \{b,b\} & \{c,c\} & \{d,d\} & \{e,e\} \\
\{a,b\} & \{b,c\} & \{c,d\} & \{d,e\} & \\
\{a,c\} & \{b,d\} & \{c,e\} & & \\
\{a,d\} & \{b,e\} & & & \\
\{a,e\} & & & &
\end{array}$$

Kombinace s opakováním

Věta

Počet všech k-prvkových kombinací na množině s n prvky je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

- k-prvkovou kombinaci na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ lze zakódovat do posloupnosti délky $n + k$ tak, že prvky množiny napíšeme do řady a za každý prvek vložíme tolik znaků $\square$, kolikrát je prvek obsažen v kombinaci. Např. kombinace $\{2, 2, 3\}$ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ odpovídá posloupnosti $1\ 2\ \square\ \square\ 3\ \square\ 4$.
- Posloupnost je přesně určená umístěním znaků $\square$.
- Znak $\square$ se nesmí vyskytnout na prvním místě.
- k znaků $\square$ se tedy vyskytuje na některých z $n + k - 1$ míst.
- Posloupností (a tedy i kombinací) je celkem $\binom{n+k-1}{k}$.

Kombinace s opakováním

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout hod třemi hracími kostkami? (Zajímá nás, co kolikrát padne: např. dvě trojky a jedna pětka).

Kombinace s opakováním

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout hod třemi hracími kostkami? (Zajímá nás, co kolikrát padne: např. dvě trojky a jedna pětka).
- Odpověď je $\binom{6+3-1}{3} = 56$.
- Jedná se o 3-prvkové kombinace s opakováním nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Obecné principy počítání složených výběrů

Princip nezávislých výběrů

Princip nezávislých výběrů neboli princip součinu

Pokud se výběr skládá z dvou či více vzájemně nezávislých podvýběrů, pak je celkový počet výběrů roven součinu počtů jednotlivých podvýběrů.

Příklad

- Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků, 9 obránců a 2 brankáře. Kolik kombinací hokejistů se může objevit na ledě, aby tam byli 3 útočníci, 2 obránci a jeden brankář?

Princip nezávislých výběrů

Princip nezávislých výběrů neboli princip součinu

Pokud se výběr skládá z dvou či více vzájemně nezávislých podvýběrů, pak je celkový počet výběrů roven součinu počtů jednotlivých podvýběrů.

Příklad

- Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků, 9 obránců a 2 brankáře. Kolik kombinací hokejistů se může objevit na ledě, aby tam byli 3 útočníci, 2 obránci a jeden brankář?
- Výběr útočníků: $\binom{13}{3} = 286$
- Výběr obránců: $\binom{9}{2} = 36$
- Výběr brankářů: $\binom{2}{1} = 2$
- Odpověď je $286 \cdot 36 \cdot 2 = 20\,592$.

Princip dvojího počítání

Princip dvojího počítání

Nechť lze každý výběr dále zjemnit na stejný počet l zjemněných výběrů. Dále nechť existuje celkem m různých zjemněných výběrů. Potom počet všech původních výběrů je $\frac{m}{l}$.

Příklad

- Výběr šestic hokejistů na ledě z minulého příkladu chceme zjemnit tím, že budeme uvažovat i pořadí útočníků a obránců.
- Každou kombinaci na ledě lze tedy zjemnit v $3! \cdot 2! = 12$ různých výběrů.
- Celkem těchto uspořádaných výběrů existuje $(13 \cdot 12 \cdot 11) \cdot (9 \cdot 8) \cdot 2 = 247\,104$.
- Původních výběrů je $\frac{247\,104}{12} = 20\,592$ (totéž vyšlo i minule).

Poznámky

- Při řešení příkladů lze někdy použít i princip inkluze a exkluze.
- Obecně je třeba používat selský rozum.

Příklad

- Máme k dispozici celkem 12 hráčů, z toho 5 dobrých útočníků. Kolik lze sestavit 4-členných týmů, které obsahují alespoň jednoho dobrého útočníka?
- Celkem lze sestavit $\binom{12}{4} = 495$ týmů.
- Týmů bez dobrého útočníka je $\binom{12-5}{4} = 35$.
- Týmů s alespoň jedním dobrým útočníkem tedy je $\binom{12}{4} - \binom{12-5}{4} = 460$.

Kombinatorická pravděpodobnost

Kombinatorická pravděpodobnost

- Teorie pravděpodobnosti zkoumá tzv. *náhodné pokusy*. Náhodným pokusem rozumíme opakovatelnou činnost prováděnou za stejných podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě (zejména není určen počátečními podmínkami).
- Kombinatorická (nebo také klasická) pravděpodobnost zkoumá situace, kdy náhodný pokus má jen konečně mnoho možných výsledků.
- Pravděpodobnost daného výsledku pak udává míru jeho očekávatelnosti.
- Motivace je např. v hazardních hrách.

Konečný pravděpodobnostní prostor

Definice (Konečný pravděpodobnostní prostor)

Konečný pravděpodobnostní prostor je dvojice (Ω, P),kde Ω je konečná množina elementárních jevů a $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ je funkce pravděpodobnosti, která podmnožinám Ω přiřazuje reálné hodnoty z intervalu $[0, 1]$ a splňuje

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ *a*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *kdykoliv* $A, B \subseteq \Omega$ *jsou disjunktní.*

Libovolná podmnožina $A \subseteq \Omega$ se nazývá jev a $P(A)$ je pravděpodobnost tohoto jevu.

Příklad

- Definujte pravděpodobnostní prostor hodů (poctivou) kostkou.

Příklady konečných pravděpodobnostní prostorů

Příklad

- Pravděpodobnostní prostor hodů kostkou je (Ω, P), kde
  - elementární jevy jsou “co padne”, tedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
  - funkce pravděpodobnosti $P(A) = \frac{|A|}{6}$ pro každou $A \subseteq \Omega$.
- Co je jev “padne sudé číslo”? Množina $\{2, 4, 6\}$.
- Pravděpodobnost tohoto jevu je $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Příklad

- Pravděpodobnostní prostor hodů mincí je $(\{\text{orel}, \text{panna}\}, P)$, kde

$$\begin{array}{ll} P(\emptyset) = 0 & P(\{\text{orel}\}) = \frac{1}{2} \\ P(\{\text{orel}, \text{panna}\}) = 1 & P(\{\text{panna}\}) = \frac{1}{2} \end{array}$$

Poznámky

- Pravděpodobnost elementárního jevu $a \in \Omega$ obvykle zapisujeme jako $P(a)$ namísto $P(\{a\})$.
- Pravděpodobnostní prostor je plně určený množinou Ω a pravděpodobnostmi elementárních jevů. Pro neelementární jev $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ totiž podle definice musí platit

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n).$$

- Jevy A, B jsou *disjunktní*, pokud nemohou nastat zároveň, tj. pokud $A \cap B = \emptyset$.
- Různé elementární jevy jsou vždy disjunktní.
- Udejte příklady dvou různých jevů, které nejsou disjunktní.

Uniformní pravděpodobnostní prostor

Definice

Konečný pravděpodobnostní prostor (Ω, P) *je* *uniformní**, je-li každý elementární jev* $a \in \Omega$ *stejně pravděpodobný, tj.* $P(a) = \frac{1}{|\Omega|}$.

- Pro každý jev A v uniformním prostoru platí $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.
- Uvedené prostory hodů kostkou a hodů mincí jsou uniformní.

Příklad

- Namíchání 32 karet je také uniformní pravděpodobnostní prostor, kde elementární jevy jsou permutace karet (těch je 32!).
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je $\frac{1}{32!}$.
- Jaká je pravděpodobnost jevu, že první karta je eso?

Příklad

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěmi kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 1

- Elementární jevy jsou součty, tedy $\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$.
- Pravděpodobnost elementárních jevů se ale liší:
  - součet 2 lze získat pouze jako 1+1, proto $P(2) = \frac{1}{36}$,
  - součet 3 lze získat jako 1+2 nebo 2+1, proto $P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,
  - ostatní pravděpodobnosti spočítáme analogicky.

Příklad

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěmi kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 1

- Elementární jevy jsou součty, tedy $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$.
- Pravděpodobnost elementárních jevů se ale liší:
  - součet 2 lze získat pouze jako 1+1, proto $P(2) = \frac{1}{36}$,
  - součet 3 lze získat jako 1+2 nebo 2+1, proto $P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,
  - ostatní pravděpodobnosti spočítáme analogicky.

$$
\begin{array}{llll}
P(2) = \frac{1}{36} & P(5) = \frac{1}{9} & P(8) = \frac{5}{36} & P(11) = \frac{1}{18} \\
P(3) = \frac{1}{18} & P(6) = \frac{5}{36} & P(9) = \frac{1}{9} & P(12) = \frac{1}{36} \\
P(4) = \frac{1}{12} & P(7) = \frac{1}{6} & P(10) = \frac{1}{12} &
\end{array}
$$

- Jev “padne 8” je tedy elementární s pravděpodobností $P(8) = \frac{5}{36}$.
- Pravděpodobnostní prostor není uniformní.

Příklad

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěmi kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 2

- Elementární jevy jsou dvojice hodnot na jednotlivých kostkách, tedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je $\frac{1}{36}$.
- Pravděpodobnostní prostor je uniformní.
- Jak spočítáme pravděpodobnost, že padne 8?

Příklad

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěmi kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 2

- Elementární jevy jsou dvojice hodnot na jednotlivých kostkách, tedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je $\frac{1}{36}$.
- Pravděpodobnostní prostor je uniformní.
- Jak spočítáme pravděpodobnost, že padne 8?
- Jev "padne 8" je $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ a jeho pravděpodobnost je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$.
- Toto řešení umožňuje odpovědět například na otázku, zda jsou disjunktní jevy "součet je 6" a "součin je 8". Jsou disjunktní?

Nezávislé jevy

- Nezávislost jevů intuitivně znamená, že pravděpodobnost toho, že nastane druhý z jevů není nijak ovlivněna tím, zda nastal či nenastal první jev.
- Kupříkladu pokud házeme dvěma kostkami, jsou jevy “na první kostce padne 6” a “na druhé kostce padne liché číslo” nezávislé.
- Oproti tomu jevy “na první kostce padne 5” a “součet bude 8” nezávislé nejsou.

Definice (Nezávislé jevy)

Jevy A, B v prostoru (Ω, P) jsou nezávislé, pokud platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Příklad

Ukážeme, že jevy “na první kostce padne 5” a “součet bude 8” jsou závislé.

- Pravděpodobnostní prostor (Ω, P) je tvaru $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $P(a) = \frac{1}{36}$ pro každý elementární jev $a \in \Omega$ (prostor je uniformní).
- Jev “na první kostce padne 5” je $A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$ a $P(A) = \frac{1}{6}$.
- Jev “součet bude 8” je $B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ a $P(B) = \frac{5}{36}$.
- Jevy A, B jsou závislé, neboť $P(A \cap B) = P(\{5, 3\}) = \frac{1}{36}$ a tedy

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}.$$

Poznámky

- Dva různé elementární jevy s nenulovou pravděpodobností jsou závislé, protože $P(\{a\} \cap \{b\}) = P(\emptyset) = 0 \neq P(a) \cdot P(b)$. Navíc je jasné, že pokud nastane jeden elementární jev, nemůže nastat druhý.
- Z analogického důvodu platí, že dva různé disjunktní jevy s nenulovými pravděpodobnostmi jsou také závislé.

Dotazy

- Ze zamíchaných karet rozdáme dvěma hráčům po pěti kartách. Jsou výběry karet, které dostanou, nezávislé?
- Hodíme dvěma kostkami. Je jev “na obou padne totéž” nezávislý s jevem “na první kostce padne 2”?

Podmíněná pravděpodobnost

Definice (Podmíněná pravděpodobnost)

Podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ *je pravděpodobnost jevu* B *za předpokladu, že nastal jev* A *a vypočítá se jako*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Jevy A, B jsou nezávislé právě když $P(B|A) = P(B)$.

Příklad

- Kolik je podmíněná pravděpodobnost jevu "při hodu dvěma kostkami padne součet aspoň 10" za předpokladu, že "na první kostce padlo 5"?

Podmíněná pravděpodobnost

Definice (Podmíněná pravděpodobnost)

Podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ je pravděpodobnost jevu B za předpokladu, že nastal jev A a vypočítá se jako

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Jevy A, B jsou nezávislé právě když $P(B|A) = P(B)$.

Příklad

- Kolik je podmíněná pravděpodobnost jevu “při hodu dvěma kostkami padne součet aspoň 10” za předpokladu, že “na první kostce padlo 5”?
- Odpověď je $\frac{1}{3}$.
- Pravděpodobnost “padne součet aspoň 10” je $\frac{1}{6}$ (závislost jevů).

Střední hodnota

- X je *náhodná proměnná* (nebo *náhodná veličina*), pokud je její hodnota jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu.
- Formálně je náhodná proměnná libovolná funkce přiřazující elementárním jevům prostoru (Ω, P) reálná čísla.

Definice (Střední hodnota)

Nechť náhodná proměnná X může nabýt hodnot $h_1, h_2, \ldots, h_n$ s pravděpodobností pořadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$, kde $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Střední hodnotou proměnné X je číslo

$$EX = p_1 \cdot h_1 + p_2 \cdot h_2 + \ldots + p_n \cdot h_n.$$

- Střední hodnota udává průměr získaných hodnot náhodné proměnné X při mnoha opakováních náhodného pokusu.

Příklady

Příklad

- Jaká je střední hodnota čísel padlých na hrací kostce?

Příklady

Příklad

- Jaká je střední hodnota čísel padlých na hrací kostce?
- Odpověď je

$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=\frac{1}{6}\cdot 21=3,5$$

Příklady

Příklad

- Kolik je průměrně třeba hodů mincí, aby padlo 3x totéž?
- 3x totéž padne nejdříve třetím a nejpozději pátým hodem.
- Pravděpodobnostní postor je

$$
\begin{array}{llll}
(o,o,o) & (o,o,p,o) & (o,o,p,p,o) & (o,o,p,p,p) \\
(p,p,p) & (o,p,o,o) & (o,p,o,p,o) & (o,p,o,p,p) \\
 & (o,p,p,p) & (o,p,p,o,o) & (o,p,p,o,p) \\
 & (p,o,o,o) & (p,o,o,p,o) & (p,o,o,p,p) \\
 & (p,o,p,p) & (p,o,p,o,o) & (p,o,p,o,p) \\
 & (p,p,o,p) & (p,p,o,o,o) & (p,p,o,o,p)
\end{array}
$$

- Náhodná proměnná X je vždy rovna délce n-tice.
- Pravděpodobnost každé n-tice je $\frac{1}{2^n}$.
- Celkem dostáváme, že průměrný počet potřebných hodů je

$$EX = 3\cdot(2\cdot\frac{1}{8}) + 4\cdot(6\cdot\frac{1}{16}) + 5\cdot(12\cdot\frac{1}{32}) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{15}{8} = 4,125.$$

Výpočet středních hodnot

Věta

- *Střední hodnota konstanty* c *je* $Ec = c$.
- *Střední hodnota součinu náhodné proměnné* X *a konstanty* c *je*
$$E(cX) = c \cdot EX.$$
- *Střední hodnota součtu náhodných proměnných* X, Y *je*
$$E(X + Y) = EX + EY.$$

Příklad

- Jaká je střední hodnota součtu čísel padlých na dvou kostkách?
- Odpověď je $E(X + Y) = EX + EY = 3,5 + 3,5 = 7$.

Výpočet středních hodnot

Věta

Střední hodnota součinu nezávislých náhodných proměnných X, Y je

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel padlých na dvou kostkách?
- Odpověď je $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25$.

Poznámka

- Vztah pro střední hodnotu součinu pro závislé náhodné proměnné neplatí.

Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel horní a spodní stěny hozené kostky?
- Protože náhodné proměnné jsou závislé (součet protilehlých stěn kostky je vždy 7), nelze použít vztah $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$ (tento vztah by nám dal hodnotu $12,25$).

Poznámka

- Vztah pro střední hodnotu součinu pro závislé náhodné proměnné neplatí.

Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel horní a spodní stěny hozené kostky?
- Protože náhodné proměnné jsou závislé (součet protilehlých stěn kostky je vždy 7), nelze použít vztah $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$ (tento vztah by nám dal hodnotu $12,25$).
- Z definice spočítáme střední hodnotu součinu jako

$$1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 9 + \frac{1}{3}.$$