1. *(15 bodů)* Na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ definujeme relace R a S pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ předpisy:

$$\begin{array}{lcl} (x,y) \in R & \iff & x^2 - y^2 \text{ je sudé} \\ (x,y) \in S & \iff & x \leq |y| \text{ a zároveň } x \cdot y \geq 0 \end{array}$$

   Pro každou relaci rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud se o ekvivalenci nejedná, zdůvodněte proč. Pokud se o ekvivalenci jedná, určete počet tříd rozkladu množiny $\mathbb{Z}$ podle této ekvivalence a tyto třídy popište.

2. *(10 bodů)* Vypište všechny reflexivní relace na množině $\{1, 2\}$.

3. *(10 bodů)* Zjistěte, jestli formule $(b \vee c) \Rightarrow a$ logicky vyplývá z množiny formulí $\{\neg b \Rightarrow a,\ a \vee c\}$.

4. *(20 bodů)* Vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcl} u + x + y + z + 2 & = & -2x - 2y + 2z - 1 \\ 2u + 2x + 2y + 2z + 2 & = & -2u - 2x + 6z \\ 2u + x & = & 2z + 1 \\ u + 4x - 2y - z & = & 2 \end{array}$$

5. *(10 bodů)* Kolika způsoby si mohou 4 chlapci rozdělit 10 jablek? (Pro jistotu poznamenejme, že každý chlapec je jiný, zatímco jednotlivá jablka od sebe neodlišujeme.)

6. *(20 bodů)* Provedli jsme průzkum kvality chrupu u zaměstnanců FI. Zaznamenávali jsme věk a počet zcela zdravých zubů (bez plomb). Naměřené výsledky ve formě dvojrozměrného datového souboru jsou následující:

$$\begin{pmatrix} 27 & 30 \\ 54 & 22 \\ 48 & 26 \\ 34 & 27 \\ 62 & 12 \\ 40 & 31 \\ 52 & 24 \\ 57 & 19 \end{pmatrix}$$

   Spočítejte *aritmetický průměr* a *směrodatné odchylky* obou měřených znaků. Dále spočítejte *koeficient korelace.*

7. *(15 bodů)* Definujte pojmy *graf*, *podgraf* a *izomorfismus grafů.*

1. *(15 bodů)* Vyjmenujte a definujte vlastnosti, které musí splňovat binární relace $R \subseteq A \times A$, aby byla *uspořádáním.*

2. *(10 bodů)* Nalezněte totální zobrazení $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, které bude surjektivní, ale nebude injektivní.

3. *(10 bodů)* K formuli $(b \vee \neg c) \Rightarrow a$ sestrojte ekvivalentní formuli v DNF a ekvivalentní formuli v CNF.

4. *(20 bodů)* Vyřešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 3y - 7 &= 2x + 5z \\ 3x + y &= 18 - 4y + 2z \\ 3 + 3x + 13z &= 4y - 6x \end{aligned}$$

5. *(10 bodů)* Uvažme následující dva jevy při hodu dvěma kostkami.

   jev A: "padne součet dělitelný pěti"
   jev B: "alespoň na jedné z kostek padne čtyřka"

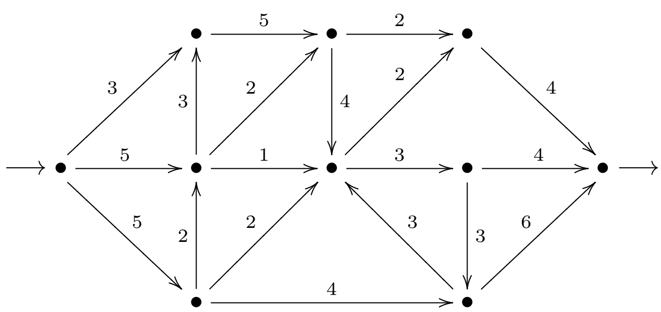
   Určete pravděpodobnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$.

6. *(15 bodů)* Provedli jsme průzkum atletických schopností studentů FI. Měřili jsme délku hodu oštěpem. Naměřené výsledky v metrech jsou následující:

$$30, 15, 24, 29, 18, 6, 20, 15, 13, 24.$$

   Určete *modus*, *medián*, *aritmetický průměr* a *rozptyl.*

7. *(20 bodů)* Najděte maximální tok v síti:



1. (15 bodů) Rozhodněte a zdůvodněte, zda je následující relace $\sim$ na množině přirozených číslech $\mathbb{N}$ reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická či úplná.
$$a \sim b \iff a + b \text{ je liché}$$

2. (10 bodů) Definujte pojem *částečné zobrazení.*

3. (10 bodů) Rozhodněte, zda je predikátová formule $(\exists x)(R(x, a) \Rightarrow R(a, x))$ tautologií nebo zda je alespoň splnitelná. Svoji odpověď zdůvodněte.

4. (20 bodů) Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic.
$$\begin{aligned} 3x + y &= 18 - 4y + 2z \\ 2x + 5z &= 3y - 7 \\ 3 + 9x + 13z &= 4y \end{aligned}$$

5. (10 bodů) Kolika různými způsoby můžeme seřadit do posloupnosti písmena slova *POLITOLOGIE*?

6. (15 bodů) Provedli jsme průzkum altetických schopností studentů FI: u každého studenta jsme měřili vysoký snožmo. Naměřené výsledky jsou následující:
$$40, 62, 82, 68, 72, 57, 62, 78, 77, 70$$
Určete variční obor, rozpětí, medián a horní a dolní kvartil.

7. (20 bodů) Spočítejte maximální tok v následující síti: