1. *(15 bodů)* Na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ definujeme relace R a S pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ předpisy:

$$\begin{aligned}(x,y) \in R &\iff |x| = |y| \\ (x,y) \in S &\iff x \cdot y \leq 20 \text{ nebo } x = y\end{aligned}$$

   Pro každou relaci rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud se o ekvivalenci nejedná, zdůvodněte proč. Pokud se o ekvivalenci jedná, určete počet tříd rozkladu množiny $\mathbb{Z}$ podle této ekvivalence a tyto třídy popište.

2. *(10 bodů)* Nalezněte uspořádání $\leq$ na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$ tak, aby uspořádaná množina $(M, \leq)$ měla právě 3 minimální a právě 2 maximální prvky.

3. *(10 bodů)* Nalezněte interpretace dokazující, že predikátová formule $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$ je splnitelná, ale není tautologií.

4. *(20 bodů)* Vyřešte soustavu lineárních rovnic s proměnnými $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}2x + 2y &= 10 - 3y \\ 2z - 3x + 4 &= 16 \\ 6x + 3y + 6 &= 4z\end{aligned}$$

5. *(15 bodů)* Házeme třikrát kostkou. Uvažme následující jevy:

   A: Součet čísel z prvních dvou hodů je 5.

   B: Čísla z prvního, druhého a třetího hodu tvoří rostoucí posloupnost.

   Určete pravdpodobnosti $P(A)$, $P(B)$ a $P(B|A)$.

6. *(15 bodů)* Provedli jsme průzkum spotřeby vína mezi zaměstnanci FI. Zjištěná konzumace v litrech za rok je následující:

$$54, 29, 5, 0, 33, 15, 21, 0, 25, 13$$

   Určete *aritmetický průměr*, *rozptyl*, *medián* a *horní* a *dolní kvartil.*

7. *(15 bodů)* Definujte pojmy *graf*, *stupeň vrcholu* grafu, a *izomorfismus* grafů.

1. *(15 bodů)* Na množině $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ definujeme relace R a S pro všechna $x, y \in \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ předpisy:

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\iff 2x \le y \ \text{ nebo } \ x = y \\ (x, y) \in S &\iff x \le 2y \ \text{ nebo } \ x = y \end{aligned}$$

   Pro každou relaci rozhodněte, zda se jedná o uspořádání. Pokud se o uspořádání nejedná, zdůvodněte proč. Pokud se o uspořádání jedná, nakreslete odpovídající Hasseův diagram a určete nejmenší, největší, maximální a minimální prvky.

2. *(10 bodů)* Vypište všechny binární relace na množině $\{a, b\}$, které *nejsou tranzitivní.*

3. *(10 bodů)* Definujte, kdy se výroková formule nazývá *tautologie* a kdy *kontradikce.*

4. *(20 bodů)* Vyřešte soustavu lineárních rovnic s proměnnými $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 4x - z &= 12 \\ z - 18 &= 2y \\ 2x &= 15 + y \end{aligned}$$

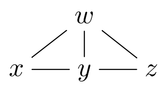
5. *(10 bodů)* Mistrovství světa v hokeji hraje 16 týmů rozdělených do dvou osmičlenných skupin označených A a B. Do čtvrfinálových zápasů postoupí 4 nejlepší celky z každé skupiny. V každém ze čtyřech čtvrtfinálových zápasů se utká tým ze skupiny A s týmem ze skupiny B. Kolik různých podob může teoreticky mít čtvrfinálové kolo? (Podobou čtvrtfinálového kola zde rozumíme čtyři dvojice týmů, které proti sobě nastoupí k čtvrtfinálovým zápasům. Nerozlišujeme přitom, z jakých míst ve skupině týmy postoupily.)

6. *(15 bodů)* Provedli jsme průzkum docházky studentů FI, kteří si zapsali IB112, na přednášky. Naměřené výsledky značí počet přednášek, kterých se jednotliví studenti zúčastnili:

$$2, 8, 10, 0, 2, 3, 2, 1, 4, 11$$

   Určete *variační obor*, *modus*, *aritmetický průměr*, *medián* a *horní* a *dolní kvartil.*

7. *(20 bodů)* Uvažme následující graf:



   (a) Určete vrcholovou a hranovou souvislost tohoto grafu.

   (b) Kolik různých koster má tento graf? Všechny kostry nakreslete.

   (c) Kolik různých koster má uvedený graf, počítáme-li všechny izomorfní kostry jako jednu?

1. (15 bodů) Vyjmenujte a definujte vlastnosti, které musí splňovat binární relace $R \subseteq A \times A$, aby byla *ekvivalencí*.

2. (10 bodů) Nalezněte totální zobrazení $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ množiny celých čísel na množinu přirozených čísel, které bude surjektivní, ale nebude bijekcí.

3. (10 bodů) K formuli $(a \Rightarrow b) \Rightarrow \neg(b \Rightarrow c)$ sestrojte ekvivalentní formuli v DNF a ekvivalentní formuli v CNF.

4. (20 bodů) Vyřešte soustavu lineárních rovnic s proměnnými $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 4x - z &= 12 \\ z - 16 &= 2y \\ 2x &= 15 + y \end{aligned}$$

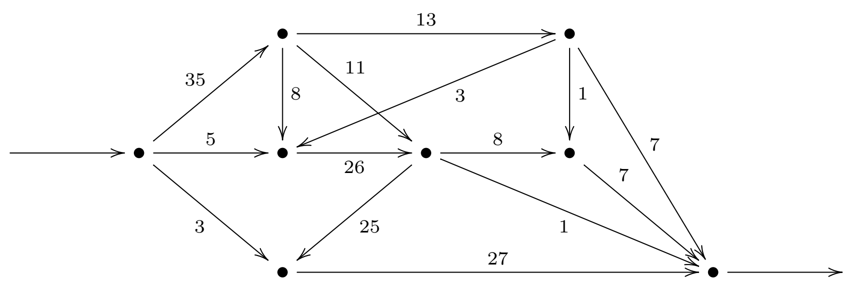
5. (10 bodů) V cukrárně mají 20 druhů zákusků (v dostatečném množství). Petr má z cukrárny na oslavu přinést balíček s pěti zákusky (ne nutně různými). Kolik různých balíčků splňujících zadání lze sestavit?

6. (15 bodů) Provedli jsme průzkum, kolik večerů týdně věnují studenti FI studiu. Zjištěné počty večerů jsou u jednotlivých studentů následující:

$$2, 1, 3, 3, 5, 4, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 1$$

Sestavte *tabulku rozložení četností* (neboli *variační řadu*) a určete *medián.*

7. (20 bodů) Pro následující síť spočítejte tok s maximální možnou velikostí:



1. *(15 bodů)* Na množině všech celých čísel $\mathbb{Z}$ definujeme relace R a S pro všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ předpisy:

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in R & \iff & |x| = |y| \text{ nebo } (\,|x| \geq 3 \text{ a } |y| \geq 3\,) \\ (x,y) \in S & \iff & x \cdot y \geq 1 \end{array}$$

   Pro každou relaci rozhodněte, zda se jedná o ekvivalenci. Pokud se o ekvivalenci nejedná, zdůvodněte proč. Pokud se o ekvivalenci jedná, určete počet tříd rozkladu množiny $\mathbb{Z}$ podle této ekvivalence a tyto třídy popište.

2. *(10 bodů)* Nalezněte uspořádání $\leq$ na množině $M = \{1, 2, 3, 4\}$ tak, aby uspořádaná množina $(M, \leq)$ měla nejmenší prvek a právě 2 maximální prvky.

3. *(10 bodů)* Zjistěte, jestli formule $b \Rightarrow c$ logicky vyplává z množiny formulí $\{\neg a \vee c,\ \neg(a \wedge c) \Rightarrow b\}$.

4. (20 bodů) Vyřešte soustavu lineárních rovnic s proměnnými $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} 4x - z & = & 16 \\ z - 18 & = & 2y \\ x & = & 16 + y \end{array}$$

5. (15 bodů) Definujte k-prvkovou *variaci* (bez opakování) na konečné množině M o n prvcích, kde $0 < k \leq n$. Dále napište, jaký je počet všech k-prvkových variací na množině M.

6. (15 bodů) Provedli jsme průzkum spotřeby piva mezi studenty FI. Zjištěná konzumace v litrech za rok je následující:

$$117, 52, 77, 0, 204, 130, 153, 93, 25, 2$$

   Určete *aritmetický průměr*, *rozptyl*, *medián* a *horní* a *dolní kvartil*.

7. (15 bodů) Pro následující síť spočítejte tok s maximální možnou velikostí: